

「システム制御理論特論」(後半)

北海道大学 大学院情報科学研究科 山下 裕

2014 年前期

入力=状態安定性 (ISS)

- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

入力=状態安定性 (ISS)

記号の説明

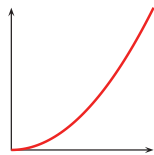
入力=状態安定性 (ISS)

- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

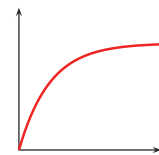
\mathbb{R}^+ : 0 または正の実数

クラス \mathcal{K} : ある連続関数 $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ がクラス \mathcal{K} に含まれているとは、 γ が狭義単調増加関数で、 $\gamma(0) = 0$ であることである。

クラス \mathcal{K}_∞ : ある連続関数 $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ がクラス \mathcal{K}_∞ に含まれているとは、 γ がクラス \mathcal{K} 、かつ $\gamma(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) となることである。



クラス \mathcal{K}_∞



クラス \mathcal{K} だがクラス \mathcal{K}_∞ ではない

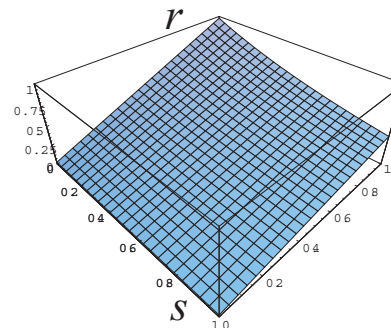
クラス \mathcal{K}_∞ には、 \mathbb{R}^+ から \mathbb{R}^+ の逆関数が存在

記号の説明 (続き)

入力=状態安定性 (ISS)

- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

クラス \mathcal{KL} : ある連続関数 $\beta: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ がクラス \mathcal{KL} に含まれているとは、 s を固定したとき、 $\beta(\cdot, s)$ がクラス \mathcal{K} で、 r を固定したとき、 $\beta(r, \cdot)$ が減少関数、かつ、 $\beta(r, s) \rightarrow 0$, ($s \rightarrow \infty$) となることである。



入力=状態安定性 (ISS) の定義

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

「入力=状態安定性」(Input-to-State Stability,ISS): 非線形系

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t)d$$

を考える。原点 $x = 0$ は全ての t に対して平衡点であるとする。
 この系が入力=状態安定であるとは、クラス \mathcal{KL} 関数 β とクラス \mathcal{K} 関数 χ が存在し、すべての初期時刻 $t_0 (> 0)$ 、すべての初期状態 $x(t_0)$ 、すべての $[0, \infty)$ で連続な入力 $d(\cdot)$ に対し、微分方程式の解が存在し、

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \chi\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |d(\tau)|\right), \quad \forall t > t_0$$

となることである。

- ✓ β の項は、時間により減衰する初期状態の影響項
- ✓ χ の項は、 d が有界であれば、それに見合った大きさで有界な、入力の影響項

線形系の場合

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

時不変線形系 $\dot{x} = Ax + Bd$ では、

$$x(t) = \exp(A(t - t_0))x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(A(t - \tau))Bd(\tau)d\tau$$

なので、

$$|x(t)| \leq \exp\left\{\left(\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A))\right)(t - t_0)\right\}|x(t_0)| + \int_{t_0}^{\infty} |\exp(A(\tau))B|d\tau \cdot \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |d(\tau)|$$

となる。よって A の全ての固有値の実部が負、すなわち線形系の意味で安定ならば、ISS となる。

ISS の必要十分条件

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ISS の必要十分条件 (Sontag and Wang 1995): 非線形系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g_1(x, t)d \\ f(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

に対して、次のような、関数 $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在するとする。

$$\begin{aligned} \gamma_1(|x|) &\leq V(x, t) \leq \gamma_2(|x|) \\ \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x, t)d \leq -\gamma_3(|x|), \text{ for } |x| \geq \rho(|d|) \end{aligned}$$

ここで、 γ_1, γ_2, ρ は、あるクラス \mathcal{K}_∞ 関数で、 γ_3 は、あるクラス \mathcal{K} 関数。
 そのとき、系は ISS となり、 $\chi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \rho$ である。

証明は省略

ISS の別の必要十分条件

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

時不変系のみを考える。そのとき、 $\gamma_1(|x|) \leq V(x) \leq \gamma_2(|x|)$ の条件は、単に「 V は正定で放射状に非有界」を意味している。

ISS の別の必要十分条件 (Sontag and Wang 1996): 非線形系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)d \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

に対して、放射状に非有界な正定関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在し、

$$\dot{V} \leq -a(|x|) + b(|d|)$$

となるものとする。ここで、 $a(\cdot), b(\cdot)$ はクラス \mathcal{K}_∞ である。そのとき、またそのときに限り、系は ISS となる。

$|d|$ を固定したとき、 $a(\cdot)$ がクラス \mathcal{K}_∞ であるので、必ず、ある一定値以上の $|x|$ の領域において $\dot{V} < 0$ となる。

積分-積分型規範との等価性

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

✓ 最大値-最大値型規範 (ISS)

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \chi(|d|_\infty)$$

✓ 積分-最大値型規範 (IISS)

$$\alpha(|x(t)|) \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \int_{t_0}^t \chi(|d(\tau)|) d\tau$$

✓ 積分-積分型規範

$$\int_{t_0}^t \alpha(|x(\tau)|) d\tau \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \int_{t_0}^t \chi(|d(\tau)|) d\tau$$

最大値-最大値型規範 (ISS) と積分-積分型規範は等価である。

ISS ならば、IISS である。逆は成り立たない。

iss-clf

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ISS-control Lyapunov function (iss-clf): なめらかで放射状に非有界な正定関数 V が iss-clf であるとは、ある \mathcal{K}_∞ 関数 ρ が存在して、すべての d に対して、

$$|x| \geq \rho(|d|) \text{ ならば}$$

$$\inf_{u \in \mathfrak{R}^m} \{L_f V + L_{g_1} V d + L_{g_2} V u\} < 0, \quad x \neq 0$$

となることである。

つまり、「ISS の必要十分条件を満たす u が存在する $V(x)$ 」。

ISS 化問題

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

今後は、時不変系だけを考える。

入力と外乱を持つ非線形系:

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)d + g_2(x)u$$

ここで、 d は外乱で、 u は制御入力。

目的: あるフィードバック $u = \alpha(x)$ のもとで、

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + g_1(x)d$$

$$= \{f(x) + g_2(x)\alpha(x)\} + g_1(x)d$$

が ISS となるように、そのフィードバック則 $\alpha(x)$ を決めること。

iss-clf の必要十分条件

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

iss-clf であるための必要十分条件: なめらかで放射状に非有界な正定関数 V が iss-clf である必要十分条件は、ある \mathcal{K}_∞ 関数 ρ が存在し、

$$L_{g_2} V(x) = 0 \text{ ならば } L_f V(x) + |L_{g_1} V(x)|\rho^{-1}(|x|) < 0, \quad x \neq 0$$

となること。

必要性: $d = \{\rho^{-1}(|x|)/|L_{g_1} V|\}(L_{g_1} V)^T$ のときにも成り立たなければならぬことから自明。

十分性: $|x| \geq \rho(|d|)$ のとき、

$$\inf_u \{L_f V + L_{g_1} V d + L_{g_2} V u\} \leq \inf_u \{L_f V + |L_{g_1} V||d| + L_{g_2} V u\}$$

$$\leq \inf_u \{L_f V + |L_{g_1} V|\rho^{-1}(|x|) + L_{g_2} V u\} < 0, \quad x \neq 0$$

となることからわかる。

さらにもうひとつの iss の必要十分条件

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

このページでは、入力が無い場合の問題に戻って考える。

u が無い場合、すなわち常に $g_2(x) = 0$ の場合、この ISS-clf の必要十分条件より、3 つめの必要十分条件が得られる。

ISS であるための必要十分条件: なめらかで放射状に非有界な正定関数 V とある \mathcal{K}_∞ 関数 ρ が存在して、

$$L_f V(x) + |L_{g_1} V(x)| \rho^{-1}(|x|) < 0, \quad x \neq 0$$

となること。

次のページでは、ISS 化問題に再び戻って考える。

ISS 化の必要十分条件

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

解析的なシステム $\dot{x} = f(x) + g_1(x)d + g_2(x)u$ を ISS 化できるフィードバック $u = \alpha(x)$ が存在するための必要十分条件は、scp を満たす iss-clf が存在することである。

必要性: Sontag and Wang の結果より自明。

十分性: Sontag-type 制御則が系を安定化することを示す。(次ページ)

ISS 化における Sontag-type 制御則

$$u = \alpha(x) = \begin{cases} -\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + (L_{g_2} V(L_{g_2} V)^T)^2}}{L_{g_2} V(L_{g_2} V)^T} (L_{g_2} V)^T, & L_{g_2} V \neq 0 \\ 0, & L_{g_2} V = 0 \end{cases}$$

ただし、 $\omega = L_f V + |L_{g_1} V| \rho^{-1}(|x|)$ 。

ISS 化の必要十分条件 (続き)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 記号の説明
- ISS の定義
- 線形系の場合
- ISS の必要十分条件
- 別の必要十分条件
- 積分型規範
- ISS 化問題
- iss-clf
- iss-clf の必要十分条件
- ISS 化の必要十分条件
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

Sontag-type 制御則の下での \dot{V} を計算しよう。

✓ $L_{g_2} V \neq 0$ のとき: $|x| \geq \rho(|d|)$ に対して、

$$\dot{V} \leq |L_{g_2} V| (|d| - \rho^{-1}(|x|)) - \sqrt{\omega^2 + (L_{g_2} V(L_{g_2} V)^T)^2} < 0$$

✓ $L_{g_2} V = 0$ のとき: Iss-clf の必要十分条件より、 $|x| \geq \rho(|d|)$ に対して、

$$\dot{V} \leq L_f V + |L_{g_1} V| \rho^{-1}(|x|) < 0$$

以上より、ISS 化されていることがわかる。

また、scp を満たすならば Sontag-type 制御則が連続であることも、安定化問題と同様に示すことができる。

最適制御

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

準備 (1) — 「最適化」の復習

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

■ 単なる制約付き最適化問題

評価関数: $J = F(x) \rightarrow \min$

探索空間: $x \in \mathbb{R}^n$

等式制約条件: $g(x) = 0, \quad g(x) \in \mathbb{R}^m$

不等式制約条件: $h_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (h(x) \geq 0 \text{ と簡単に書く})$

Lagrange 乗数の導入

拡張評価関数:

$$J_{ext}(x, \lambda, \mu, \gamma) = F(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T (h(x) - (\gamma_1^2, \dots, \gamma_\ell^2)^T)$$

ただし、 $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^\ell, \gamma \in \mathbb{R}^\ell$ であるものとする。

制約を満たしている限り、 $J_{ext} = J$ である。

準備 (2) — 「最適化」の復習

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

最適解の必要条件は、 $\frac{\partial J_{ext}}{\partial(x, \lambda, \mu, \gamma)} = 0$

$$x \text{ に関して: } \frac{\partial J_{ext}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} + \mu^T \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\lambda \text{ に関して: } g(x) = 0$$

$$\mu \text{ に関して: } h(x) - (\gamma_1^2, \dots, \gamma_\ell^2)^T = 0$$

$$\gamma \text{ に関して: } \mu_i \gamma_i = 0$$

$n + m + 2\ell$ 個の変数に関する $n + m + 2\ell$ 本の代数方程式に問題が帰着された。

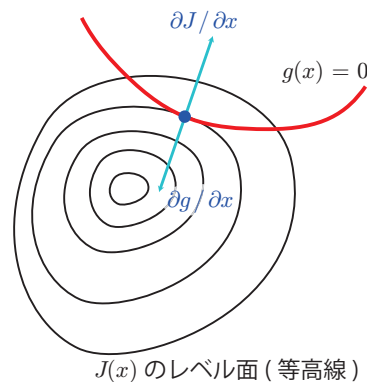
KKT 条件: (最小化の場合)

$$h(x) \geq 0, \quad \mu \leq 0, \quad \text{diag}(\mu)h(x) = 0$$

準備 (3) — 「最適化」の復習

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

Lagrange 乗数の意味



制約面とレベル面が接している。
→ 法線方向が一致

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

つまり、

$$\frac{\partial J_{ext}}{\partial x} = 0, \quad J_{ext} = J + \lambda g$$

また、 $\partial J_{ext} / \partial \lambda = 0$ より、元の制約式が得られる。

最適制御問題

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

最適制御問題 与えられた状態方程式・初期条件・終端条件・拘束条件の下で、評価関数を最小とする制御入力を求めよ。

典型的な問題設定 (終端時間 T 固定, 終端条件なし):

- ✓ 制御対象: $\dot{x} = f(x) + g(x)u$
- ✓ 評価規範 (Bolza 型): $J(x(0); u(\cdot)) = F(x(T)) + \int_0^T L(x, u)dt$
- ✓ 入力制約: $K(u) \geq 0 \in \mathbb{R}^\ell$
- ✓ 初期値: $x(0) = x_0$

評価規範は、初期値 $x(0)$ と入力 $u(t)$ に関する汎関数。

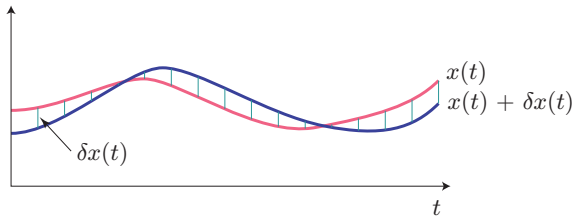
汎関数: 簡単にいえば、関数の関数。つまり、関数を引数とする関数。この場合は、入力が時間の関数で、評価規範はさらにその関数。

汎関数の場合、微分の代わりに変分を用いる。

変分法 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

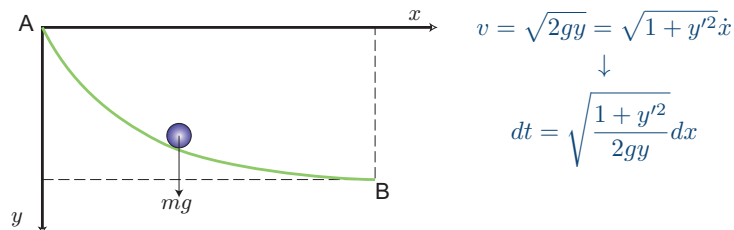
- ✓ 普通関数 $F(x)$ の場合: $F(x + dx) = F(x) + \frac{dF}{dx} dx + O(dx^2)$
 dx が微小なら微分法。
 実際、 dx の一次の係数は微分そのもの。
- ✓ 汎関数 $F(x(\cdot))$ の場合は、 $x + dx$ の代わりに $x(t) + \delta x(t)$
 → 変分法



変分法の例 — 最速降下線 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

問題 (最速降下線: Brachistocrone): 重力下で摩擦なく滑る物体 (物体の大きさは無視) が点 A から B まで最短時間で移動するような曲線 $y(x)$ を設計する。(Bernoulli' Challenge 1696)



よって、問題は、

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx \rightarrow \min$$

変分法 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

例 $F(x(\cdot)) = \phi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$

これの変分を求めよう。

$$\begin{aligned} F(x + \delta x) - F(x) &= \frac{\partial \phi}{\partial x(T)} \delta x(T) + \int_0^T \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt + O(\delta x^2) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x(T)} \delta x(T) + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_0^T + \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + O(\delta x^2) \end{aligned}$$

停留条件 (両端自由の場合)

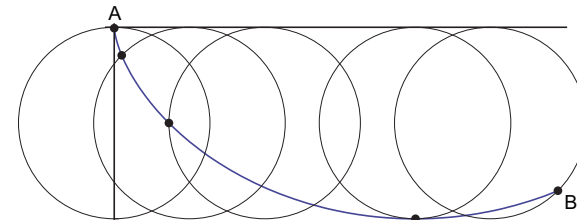
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(0), \dot{x}(0), 0) &= 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x(T)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(T), \dot{x}(T), T) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \quad (\text{Euler-Lagrange 方程式}) \end{aligned}$$

変分法の例 — 最速降下線 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

Euler-Lagrange 方程式: $1 + y'^2 + 2yy'' = 0$

解はサイクロイド (Cycloid) 曲線:



拡張評価規範 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御**
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範**
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

最適制御問題に戻る。制約式に対応する補助変数 $p(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t) \in \mathbb{R}^\ell$, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^\ell$ を導入する。

拡張評価規範:

$$J_{ext} = F(x(T)) + \int_0^T L(x, u) dt + \int_0^T p(t)^T (f(x) + g(x)u - \dot{x}) dt + \int_0^T \mu(t)^T (K(u) - (\gamma_1^2, \dots, \gamma_\ell^2)^T) dt$$

変分の計算 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御**
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範**
- 変分の計算**
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

変分の導入: 最適解を x^* , p^* , u^* , μ^* , γ^* とする。

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) + \delta x(t), & \mu(t) &= \mu^*(t) + \delta \mu(t) \\ p(t) &= p^*(t) + \delta p(t), & \gamma(t) &= \gamma^*(t) + \delta \gamma(t) \\ u(t) &= u^*(t) + \delta u(t) \end{aligned}$$

また、最適な評価規範の値を J_{ext}^* とおく。

$$J_{ext} = F(x^*(T) + \delta x(T)) + \int_0^T H(x^* + \delta x, p^* + \delta p, u^* + \delta u) dt - \int_0^T (p^* + \delta p)^T (\dot{x}^* + \delta \dot{x}) dt + \int_0^T (\mu^* + \delta \mu)^T \{K(u^* + \delta u) - ((\gamma_1^* - \delta \gamma_1)^2, \dots, (\gamma_\ell^* - \delta \gamma_\ell)^2)^T\} dt$$

拡張評価規範 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御**
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範**
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ハミルトニアンを導入: (プレ)ハミルトニアンを以下のように定義する。

$$H(x, p, u) = L(x, u) + p^T (f(x) + g(x)u)$$

すると拡張評価規範は、

$$J_{ext} = F(x(T)) + \int_0^T H(x, p, u) dt - \int_0^T p^T \dot{x} dt + \int_0^T \mu(t)^T (K(u) - \mathbf{diag}(\gamma)\gamma) dt$$

と書ける。

変分の計算 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御**
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範**
- 変分の計算**
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

1 次の変分だけ見て、さらに部分積分し、 $\delta x(0) = 0$ を使う。

$$\begin{aligned} J_{ext} &= J_{ext}^* + \frac{\partial F}{\partial x}(x^*(T)) \delta x(T) + \int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right)_{x=x^*, p=p^*, u=u^*} dt - p^{*T}(T) \delta x(T) + \int_0^T \dot{p}^{*T} \delta x dt - \int_0^T \dot{x}^{*T} \delta p dt + \int_0^T \mu^{*T} \frac{\partial K}{\partial u} \Big|_{u=u^*} \delta u dt + \int_0^T \{K(u^*) - \mathbf{diag}(\gamma^*)\gamma^*\}^T \delta \mu dt - 2 \int_0^T \mu^{*T} \mathbf{diag}(\gamma^*) \delta \gamma dt + \text{高次の変分} \end{aligned}$$

変分の計算 (3)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

停留条件

δp の係数: $\dot{x}^* = \left[\frac{\partial H(x^*, p^*, u^*)}{\partial p^*} \right]^T$

δx の係数: $\dot{p}^* = - \left[\frac{\partial H(x^*, p^*, u^*)}{\partial x^*} \right]^T$

$\delta x(T)$ の係数: $p^*(T) = \left[\frac{\partial F(x^*(T))}{\partial x^*(T)} \right]^T$

初期条件: $x^*(0) = x_0$

δu の係数: $\frac{\partial H(x^*, p^*, u^*)}{\partial u^*} + \mu^{*T} \frac{\partial K(u^*)}{\partial u^*} = 0$

$\delta \mu$ の係数: $K(u^*) - \text{diag}(\gamma^*)\gamma^* = 0$

$\delta \gamma$ の係数: $\mu^{*T} \text{diag}(\gamma^*) = 0$

最適性の必要条件 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

■ u に関する方程式

$$\frac{\partial H}{\partial u} + \mu^T \frac{\partial K}{\partial u} = 0,$$

$$K(u) - \text{diag}(\gamma)\gamma = 0, \quad \mu^T \text{diag}(\gamma) = 0$$

Remark: これは、固定した x と p に対しての

$$H(x, p, u) \rightarrow \min, \quad \text{subject to } K(u) \geq 0$$

という問題の必要条件にもなっている。

実際は、より強い以下の条件が u に関してなりたつ。

最小原理:

最適な u は $K(u) \geq 0$ の制約内でハミルトニアン H を最小化する。

問題によっては、Hamiltonian の L と終端コストの前に定数の abnormal multiplier を掛ける必要があるが、ここで述べる標準的な問題では不要である。

最適性の必要条件 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

以降は * を省略して記述する。

■ x と p に関する条件 正準方程式:

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial H}{\partial p} \right]^T$$

$$\dot{p} = - \left[\frac{\partial H}{\partial x} \right]^T$$

初期条件:

$$x(0) = x_0$$

終端条件:

$$p(T) = \left[\frac{\partial F}{\partial x(T)} \right]^T$$

固定区間に関する最適制御問題の解法 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

Finite Horizon 問題で終端時間固定、初期値 $x(0) = x_0$ が与えられているときの最適制御問題の解き方:

1. ハミルトニアンを入力制約内で最小化する u を x と p の関数で求める。それを $u^*(x, p)$ とおく。
2. 正準方程式:

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial H}{\partial p} \right]^T$$

$$\dot{p} = - \left[\frac{\partial H}{\partial x} \right]^T$$

$$x(0) = x_0, \quad p(T) = \left[\frac{\partial F}{\partial x(T)} \right]^T$$

に $u = u^*(x, p)$ を代入した微分方程式を解く。

3. その解を $u^*(x, p)$ に代入したものが最適入力である。

固定区間に関する最適制御問題の解法 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

- ✓ 実際は、2. の 2 点境界値問題を解くのが簡単ではない。そのため、各種の数値計算法が提案されている。
- ✓ ハミルトニアンを最小化する u が一意に決まらない場合がある。たとえば、ハミルトニアンが u に関して 1 次で、 u の係数が最適軌道上で 0 になる場合である。
→ 最適特異制御 (完全には解けていない = 未解決問題)

正準方程式の特徴 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ハミルトニアン H の時間微分は、(u が微分可能だとして)

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H^T}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H^T}{\partial x} \right) - \mu^T \frac{\partial K}{\partial u} \dot{u} \\ &= -\mu^T \frac{dK(u)}{dt}\end{aligned}$$

- ✓ $K_i(u) > 0$ のとき $\mu_i = 0$
 - ✓ ある区間で、 $K_i(u) = 0$ ならば、 $dK_i/dt = 0$
- よって、ほとんどすべての t に対して $\dot{H} = 0$

(仮の結論) 最適な u が時間に関して微分可能ならば、 H は定数である。
では、 u が不連続に変化したときに、 H はジャンプしないか?

正準方程式の特徴 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 準備
- 最適制御問題
- 変分法
- 変分法の例
- 拡張評価規範
- 変分の計算
- 最適性の必要条件
- 最適制御問題の解法
- 正準方程式の特徴
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

- ✓ x と p は連続に変化する。(正準方程式に従うから)
- ✓ 最適な u はハミルトニアン H を最小化する。
→ 最適な u に対しては、ハミルトニアン H も連続に変化

したがって、

H は最適軌道に沿って時間に関して定数である。

実は、この値は「終端時間を固定したことに對するラグランジュ乗数」に相当するものである。

→ 終端時間自由あるいは Infinite Horizon 問題の場合は、最適軌道に沿って $H = 0$ 。

非線形最適レギュレータ

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 - 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

最適制御問題 (再掲)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 随伴変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

典型的な問題設定 (終端時間 T 固定, 終端条件なし):

- ✓ 制御対象: $\dot{x} = f(x) + g(x)u$
- ✓ 評価規範 (Bolza 型):

$$J(x(0); u(\cdot)) = F(x(T)) + \int_0^T L(x, u) dt \rightarrow \min$$

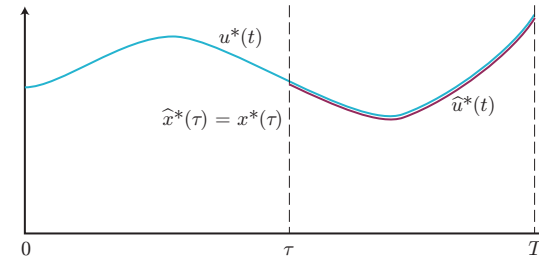
- ✓ 入力制約: $K(u) \geq 0 \in \mathcal{R}^l$
- ✓ 初期値: $x(0) = x_0$

最適性の原理

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 随伴変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

制御区間を $[0, T]$ としたときの最適制御の解を $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ とする。
 制御区間を $[\tau, T]$, 初期値を $x^*(\tau)$ としたときの最適制御の解を $\{\hat{x}^*(\cdot), \hat{u}^*(\cdot)\}$ とすると、

$$\hat{x}^*(t) = x^*(t), \quad \hat{u}^*(t) = u^*(t), \quad t \in [\tau, T]$$



最適制御 $u^*(t)$ の値は、そのときの状態と残り時間 $T - t$ で記述可能
 このとき初期値 $x(0)$ は不要

最適レギュレータ問題

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 随伴変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

最適レギュレータ問題: 与えられた評価規範を最小化するフィードバック則 $u = \alpha(x, t)$ を求める。

- ✓ 特に、**無制限制御区間のとき** ($T = \infty$) で、終端コストが無い ($F(x(T)) = 0$) のとき、**最適フィードバック則は時間によらず** $u = \alpha(x)$ のように書くことができる。**以降はこの無制限制御区間のときのみ考える。**
- ✓ 以降、 $f(0) = 0, L(0, 0) = 0, L(x, u) \geq 0$ と仮定する。
- ✓ さらに、 $T = \infty$ なので評価規範の積分が発散しないように、考えている u の関数のクラスを

$$\mathcal{U}(x(0)) = \{u(\cdot) : \text{初期値 } x(0) \text{ に対する解 } x(t) \text{ が } 0 \text{ に収束}\}$$

に限定する。このクラス以外の u を考えても評価規範が発散するだけなので無駄である。

随伴変数の限定

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 随伴変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

以降は、

$$L(x, u) = L_0(x) + \frac{1}{2} u^T R u$$

とする。ここで、 $L_0(x)$ は (準) 正定関数, R は正定行列。
 また、これ以降、入力制約が無い場合を考える。

(プレ)ハミルトニアン:

$$H(x, p, u) = p^T (f(x) + g(x)u) + L_0(x) + \frac{1}{2} u^T R u$$

もし、

$$p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V(0) = 0$$

の形に**限定すれば**、

$$\int_0^\infty H(x, p, u) dt + V(x(0)) = J(x(0); u), \quad u \in \mathcal{U}(x(0))$$

H の最小値 — 平方完成

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ハミルトニアンを u に関して平方完成する。

$$H(x, p, u) = p^T f(x) + L_0(x) - \frac{1}{2} p^T g(x) R^{-1} g(x)^T p + \frac{1}{2} (u + R^{-1} g(x)^T p)^T R (u + R^{-1} g(x)^T p)$$

(プレ)ハミルトニアン $H(x, p, u)$ は、

$$u = -R^{-1} g(x)^T p$$

のとき最小値を持ち、そのときの最小値は、

$$H^*(x, p) = p^T f(x) + L_0(x) - \frac{1}{2} p^T g(x) R^{-1} g(x)^T p$$

$H(x, p, u)$ をプレハミルトニアン、 $H^*(x, p)$ をハミルトニアンと区別して言うことがある。

Hamilton-Jacobi 方程式 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

Hamilton-Jacobi 方程式 (HJ 方程式):

$$H^* \left(x, \frac{\partial V^T}{\partial x} \right) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + L_0(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V^T}{\partial x} = 0$$

を満たす、正定関数 $V(x)$ が存在すると仮定する。

右辺をゼロとするのは、無制限制御区間問題では最適軌道に沿ってハミルトニアンがゼロになるからである。

正定解の存在性と $p^T = \partial V / \partial x$ と置くことの正当性については後で述べる。とりえず今回は、十分条件だけ求める。

Hamilton-Jacobi 方程式 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

すると、

$$V(x(0)) \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty (u + R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V^T}{\partial x})^T R (u + R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V^T}{\partial x}) dt + V(x(0)) = J(x(0), u), \quad u \in \mathcal{U}(x(0))$$

となる。

評価規範 $J(x(0), u)$ は

$$u = u^*(x) = -R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V^T}{\partial x} V(x)$$

のとき最小値を持ち、そのときの J の値は $V(x(0))$ である。

を**値関数**と呼ぶこともある。

安定性の検証 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

$V(x)$ は正定関数なので、これを Lyapunov 関数として安定性を検証する。

- ✓ $V(x)$ は放射状に非有界と仮定
- ✓ 最適入力: $u^* = -R^{-1} g(x)^T (\partial V / \partial x)^T$

$V(x(t))$ の時間微分:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + g(x)u^*) = -L(x, u^*) = -L_0(x) - \frac{1}{2} u^{*T} R u^*(x) \leq 0$$

安定性の検証 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ**
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

$L(x, u^*(x)) = 0$ となる集合、すなわち、

$$u^*(x) = 0 \text{ and } L_0(x) = 0$$

なる集合に収束。

最適レギュレータの安定性: $L(x, u)$ を出力としたゼロ状態可検出性が成り立つなら最適フィードバックの下で系は大域的漸近安定。

特に、 $L_0(x)$ が正定関数なら必ず大域的漸近安定。
 \Rightarrow レギュレータ (安定化器) の名前の由来

$L_0(x)$ が正定関数であるとして、逆に、ある $V(x)$ が HJ 方程式を満たし、フィードバック $u = u^*(x) = -R^{-1}g(x)^T \partial V / \partial x^T$ が原点を漸近安定化するのであれば、 $J(x(0); u^*) = V(x(0))$ より、 $V(x)$ は正定関数である。

線形系の場合 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ**
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

線形系: $\dot{x} = Ax + Bu$

評価規範: $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt \rightarrow \min, \quad Q > 0, R > 0$

値関数: $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x, \quad P > 0$

Hamilton-Jacobi 方程式:

$$\frac{1}{2} x^T (PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q) x = 0$$

設計手順

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ**
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

とりえず、まだ十分条件のままであるが、設計手順をまとめる。

1. $u = 0$ のもとで $L_0(x)$ を出力としたゼロ状態可検出性が成り立つことを確認する。
2. Hamilton-Jacobi 方程式:

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = 0$$

の正定解 $V(x)$ が存在すると仮定し、それを求める。

3. そのとき、最適フィードバック

$$u = u^*(x) = -R^{-1}g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}$$

は評価規範を最小化し、その時の閉ループ系の原点は漸近安定となる。

線形系の場合 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ**
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

Riccati 方程式:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

の解 $P (> 0)$ が存在するならば、最適フィードバックは

$$u = -R^{-1}B^T P x$$

線形系の場合は、 (A, B) が可制御なら、必ず Riccati 方程式の正定解は存在。

ハミルトニアン行列 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

評価規範: $J = \int_0^T L_0(x) + \frac{1}{2} u^T R u dt, \quad R > 0$

ハミルトニアンを最小化する u : $u^*(x, p) = -R^{-1}g(x)^T p$

線形近似

$$\dot{x} = Ax + Bu + O(\|x, u\|^2)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T x^T Q x + u^T R u dt + O(x^3)$$

(A, B) が可制御, $Q > 0$ と仮定。

正準方程式の原点周りの一次近似:

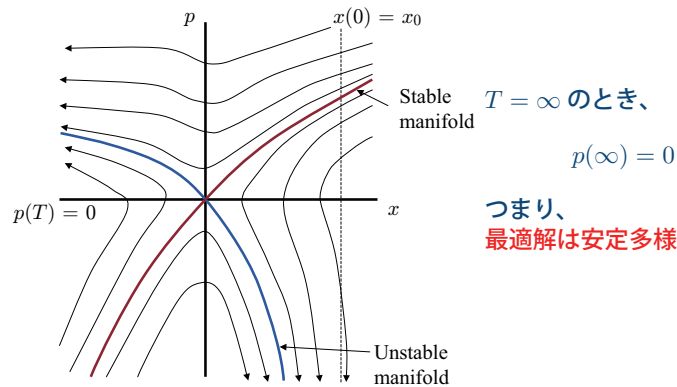
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \approx A_H \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

A_H をハミルトニアン行列という。

安定多様体 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

適切な仮定の下で、最適制御問題の正準方程式系は、 n 次元の安定多様体と n 次元の不安定多様体を持つ。



つまり、
最適解は安定多様体上。

ハミルトニアン行列 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ハミルトニアン行列の性質: A_H が固有値 λ を持つならば、 $-\lambda$ も A_H の固有値である。

証明 A_H が

$$(\lambda I - A_H) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0$$

なる固有値 λ と右固有ベクトル $(f^T, g^T)^T$ を持つとする。そのとき、 $(-g^T, f^T)(-\lambda I - A_H) = 0$ が成り立つことが簡単な計算でわかる。つまり、 A_H は固有値 $-\lambda$ と左固有ベクトル $(-g^T, f^T)$ を持つ。□

この場合のハミルトニアン行列は虚軸上に固有値を持たない。 $(H_\infty$ 制御の場合のハミルトニアン行列など一般の場合はその限りではない。)

この性質を系が双曲的であるという。

つまり、

適切な仮定の下で、最適制御問題の正準方程式系の線形近似は、 n 個の安定な固有値と n 個の不安定な固有値を持つ。

安定多様体 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

安定多様体が x の空間に対して射影的であれば、安定多様体は $p^T = \omega(x)$ のように書ける。

そのときの最適フィードバック: $u = -R^{-1}g(x)^T \omega(x)$

命題: 双曲的なハミルトンシステムの安定多様体・不安定多様体はラグランジュ多様体である。

ラグランジュ多様体の説明には微分幾何の知識が必要になるので、ここでは触れない。

ただし、次のことがいえる。

ラグランジュ多様体が原点近傍で射影的であれば、 $p^T = \omega(x)$ と書けるが、そのとき ω は完全微分形式である。

つまり、原点近傍で

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x}$$

なるスカラー関数 $V(x)$ が存在する。

これが、 $p = [\partial V / \partial x]^T$ とおくことができる根拠。

Riccati 方程式の解法 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法**
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ここでは、線形系の場合の Riccati 方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

の解法 (有本=ポッターの解法) を説明する。これは、正準系の安定多様体 (線形の場合、安定な部分空間) を求める方法である。

線形の正準方程式:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = A_H \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

の安定多様体が $p = [\partial V / \partial x]^T = Px$ となることを利用して、 P を求める。

Riccati 方程式の解法 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法**
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

1. A_H の安定な固有値に対する固有ベクトル空間:

$$A_H \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

2. Λ : n 個の安定な固有値と同じ固有値を持つ行列
すると、その固有ベクトル空間上に $(x^T, p^T)^T$ がある。

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Px \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} k$$

$$x = S_1 k, Px = S_2 k \text{ から係数 } k \text{ を消去すると, } Px = S_2 S_1^{-1} x$$

Riccati 方程式の解は、 $P = S_2 S_1^{-1}$

最適レギュレータと OPF (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

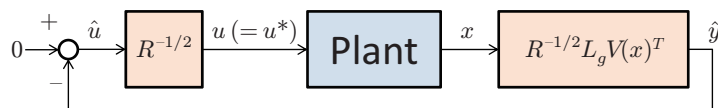
HJ 方程式より、開ループ系に対して、

$$\dot{V} = L_f V + L_g V \cdot u \leq L_g V \cdot u + \frac{1}{2} L_g V(x) R^{-1} L_g V(x)^T$$

ここで、 $\hat{u} = R^{1/2} u$, $\hat{y} = R^{-1/2} L_g V(x)^T = -R^{1/2} u^*(x)$ とおくと、

$$\dot{V} \leq \hat{u}^T \hat{y} + \frac{1}{2} \hat{y}^T \hat{y}$$

\hat{u} を入力、 \hat{y} を出力とする制御対象は OPF(-1/2)。



線形系では、
ゲイン余裕: ∞ , 位相余裕: 60° , ゲイン下限: 最適ゲインの半分

最適レギュレータと OPF (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

定理: 次の 2 つは同値である。

(1) システム 1

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

に対するフィードバック則 $u = -k(x)$ は、閉ループ系を漸近安定化し、かつ、ある $L_0(x) \geq 0$ ($L_0(0) = 0$) が存在し、評価規範

$$J = \int_0^\infty L_0(x) + \frac{1}{2} u^T R u dt$$

を最小とするフィードバックである。

(2) システム 2

$$\dot{x} = f(x) + \hat{g}(x)\hat{u} = f(x) + g(x)R^{-1/2}\hat{u}$$

$$y = R^{1/2}k(x)$$

は「ゼロ入力下でゼロ状態可検出」で、正定なストレージ関数に対し OPF(-1/2) である。

最適レギュレータと OFP (3)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OFP との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

証明 (1) → システム 2 の OFP(-1/2) は既に示した。(1) → システム 2 の「ゼロ入力下でのゼロ状態可検出性」を次に示す。 $\dot{x} = f(x) - g(x)k(x)$ は漸近安定なので $y = R^{1/2}k(x)$ に対してゼロ状態可検出性は当然成り立つ。これは、 $\dot{x} = f(x)$, $y = R^{1/2}k(x)$ に対するゼロ状態可検出性と同値であり、(1) ならば (2) は示された。
次に (2) ならば (1) を考える。(2) が成り立つならば、Hill=Moylan の定理より、 $q(x)$ と正定関数 $S(x)$ が存在し、

$$L_f S = -\frac{1}{2}q(x)^T q(x) + \frac{1}{2}k(x)^T R k(x)$$

$$L_{g'} S = k(x)^T R^{1/2}$$

$S(x) = V(x)$, $2L_0(x) = q(x)^T q(x)$ とおけば、これは HJ 方程式そのものと最適入力の式になる。また、最適入力の下では $k(x) = 0$ かつ $L_0(x) = 0$ の集合に漸近するのでゼロ状態可検出性より $u = -k(x)$ はシステム 1 を漸近安定化する。

逆最適設計 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OFP との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

定理 (逆最適設計の手順): ある放射状に非有界な $\text{clf } V(x)$ に対し、フィードバック $u = k_1(x) = -(1/2)R(x)^{-1}(L_g V)^T$ ($R(x)$ は正定行列) が系を大域的漸近安定化し $V(x)$ を強リアプノフ関数として持つものとする。そのとき、ゲインを 2 倍にしたフィードバック $u = k_2(x) = -R(x)^{-1}(L_g V)^T$ は逆最適制御則。

証明: $u = k_1(x)$ の下で漸近安定なので、

$$\dot{V} = L_f V + L_g V \cdot k_1 = -W(x) < 0 \quad (x \neq 0)$$

このとき、開ループ系に対して、

$$\dot{V} = L_f V + L_g V \hat{u} = -W(x) + L_g V (\hat{u} - \hat{y}/2)$$

$$< \hat{y}^T \left(\hat{u} - \frac{1}{2} \hat{y} \right) \quad (x \neq 0)$$

なので OFP(-1/2) である。

逆最適設計 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OFP との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

$L_0(x)$ の選び方によらず、最適フィードバックは、一定の好ましい性質を持つ。

OFP(-1/2) かつゼロ状態可検出な出力 y を探す → $u = -y$ はある $L_0(x)$ に対して最適なフィードバック

逆最適設計: $L_0(x)$ は最初に決めないで、つまり評価規範を最初に決めないで、ある意味での最適なフィードバック則を導く。

逆最適設計 (3)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 — 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OFP との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

- ✓ 逆最適設計では、制御則が $u = -R(x)^{-1}L_g V^T$ ($R(x) > 0$) の形をしている、ということが重要。
- ✓ この形のフィードバック則は **Jurdjevic-Quinn 型制御則** と呼ばれる。
- ✓ Sontag 型制御則も Jurdjevic-Quinn 型制御則ではあるが、 $L_g V(x) = 0$ となる点 x で $R(x)^{-1}$ の部分がゼロになる。
- ✓ $R(x)$ の部分を設計することで、漸近安定化する制御則でかつ逆最適となるような様々な制御則公式を作り出せる。

逆最適設計 (4)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 最適制御問題 (再掲)
- 最適性の原理
- 最適レギュレータ問題
- 隣接変数の限定
- H の最小値 → 平方完成
- HJ 方程式
- 安定性の検証
- 設計手順
- 線形系の場合
- ハミルトニアン行列
- 安定多様体
- Riccati 方程式の解法
- OPF との関係
- 逆最適設計
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

Sontag 型制御則のゲインを半分にしたものも漸近安定化制御則である。

実際、clf の性質より

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \left\{ L_f V - \sqrt{L_f V^2 + (L_g V \cdot L_g V^T)^2} \right\} < 0 \quad (x \neq 0)$$

$L_g V(x) = 0$ となる点での不具合を避けるために Sontag 型制御則を
 変更:

$$u = \alpha'_S(x) = \alpha_S(x) - c \cdot L_g V^T \quad (c > 0)$$

は必ず逆最適制御則。

($\hat{u} \rightarrow \hat{y}$ ではなく、) u から $\alpha'_S(x)$ までのセクタ余裕を考えて、 c の値は決定される。

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $FB \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

非線形 \mathcal{H}_∞ 制御

ロバスト制御 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $FB \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ロバスト性: 外乱・モデル化誤差の影響を受けないこと。

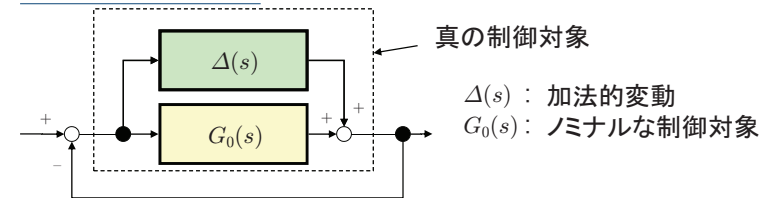
線形の \mathcal{H}_∞ 制御: 外乱から評価出力までの伝達関数のノルム (= \mathcal{H}_∞ ノルム) をある値以下に押さえる制御

線形系では、 \mathcal{H}_∞ ノルムと \mathcal{L}_2 ゲインは等しいので、非線形系でも \mathcal{L}_2 ゲインを使って、同じ事ができる。

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $FB \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ロバスト制御 (2)

線形のロバスト安定性



条件: \checkmark $\Delta(s)$ そのものは安定
 \checkmark $|\Delta(j\omega)| < h(\omega)$ なる正の関数 $h(\omega)$ が既知

そのような全ての $\Delta(s)$ に関して閉ループ系が安定となる必要十分条件

- \checkmark $\Delta(s) = 0$ のときの閉ループ系が安定、かつ
- \checkmark $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$

散逸不等式 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

(微分) 散逸不等式: $(\dot{V} \leq s(\dots))$

$$L_f V + L_g V \cdot w \leq \gamma^2 |w|^2 - |h(x)|^2 = \gamma^2 w^T w - h(x)^T h(x)$$

移項して w に関して平方完成すると

$$L_f V + h^T h + \frac{1}{4\gamma^2} L_g V \cdot L_g V^T - \gamma^2 (w - \frac{1}{2\gamma^2} L_g V^T)^T (w - \frac{1}{2\gamma^2} L_g V^T) \leq 0$$

右辺は、 $w = (1/2\gamma^2) L_g V^T$ (最悪外乱) のとき、
最大値 $L_f V + h^T h + (1/4\gamma^2) L_g V \cdot L_g V^T$ を持つ。

全ての w に対して散逸不等式を満たす必要十分条件は

$$L_f V + h^T h + \frac{1}{4\gamma^2} L_g V \cdot L_g V^T \leq 0$$

\Rightarrow ハミルトン=ヤコビ不等式

安定性の条件 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

正定で放射状に非有界なストレージ関数 $V(x)$ がハミルトン=ヤコビ不等式を満たしていると仮定する。

安定性を調べたい $\Rightarrow V(x)$ をリアプノフ関数として検証

✓ $w = 0$ のとき、

$$\dot{V} = L_f V \leq -h^T h - \frac{1}{4\gamma^2} L_g V \cdot L_g V^T \leq -h(x)^T h(x)$$

「 $z = h(x)$ を出力とし $w = 0$ としたシステムがゼロ状態可検出」ならば、 $w = 0$ のとき大域的漸近安定。

✓ “厳密な” HJ 不等式

$$L_f V + h^T h + \frac{1}{4\gamma^2} L_g V \cdot L_g V^T < 0 \quad (x \neq 0)$$

が成り立つとすると、 $w = 0$ のとき、 $\dot{V} < 0$ ($x \neq 0$) となるので、大域的漸近安定。

ハミルトン=ヤコビ不等式

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式**
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

ハミルトン=ヤコビ不等式

$$L_f V + h^T h + \frac{1}{4\gamma^2} L_g V \cdot L_g V^T \leq 0$$

の準正定解 $V(x)$ が存在。 \Rightarrow 局所的に γ 以下の \mathcal{L}_2 ゲインをもつための十分条件。ただし、安定性はわからない。

1. 最適レギュレータの HJ 方程式とは符号が違い、方程式が不等式になっている。
2. 不等式を等式としても、準正定解が一意でないかもしれない。

安定性の条件 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

「 $z = h(x)$ を出力とし $w = 0$ としたシステムがゼロ状態可検出」とし、HJ 方程式 (HJ 不等式に含まれている) を考える。

- ✓ 準正定解 $V(x)$ は一意とは限らないし、存在するかどうか不明。
- ✓ 最悪外乱下で安定かどうかはわからない。たとえ最悪外乱下で不安定だったとしても、原点から出発した解は原点にとどまり、原点以外から出発して発散する場合でも、外乱の γ 倍よりも出力が小さければ \mathcal{L}_2 ゲインの定義を満たす。
- ✓ 最悪外乱 ($V(x)$ に依存することに注意) の下で安定であることを保証するような $V(x)$ を安定化解と呼ぶ。
- ✓ もし、Hamiltonian 行列が虚軸上に固有値を持たずに、正準系が双曲的なら安定化解があるはずである。なぜなら、正準系の安定多様体上に制約されたダイナミクスは最悪外乱下での制御対象のダイナミクスに一致するからである。

また、厳密な HJ 不等式の準正定解は、正定である。
非線形系の場合、大域性を考えると正定解以外は使いづらいので、以降では主に正定解のみ考える。

線形系の場合

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

線形系

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx$$

に対し、「ゼロ外乱下でのゼロ状態可検出性」を仮定する。

この系が γ 以下の \mathcal{L}_2 ゲインを持つ条件:

$$PA + A^T P + CC^T + \frac{1}{\gamma^2} PBB^T P \leq 0$$

を満たす準正定解 P が存在すること。

この系が γ 未満の \mathcal{L}_2 ゲインを持つ条件:

$$PA + A^T P + CC^T + \frac{1}{\gamma^2} PBB^T P < 0 \quad (x \neq 0)$$

を満たす正定解 P が存在すること。

$V(x) = x^T P x$ と置いた場合に相当している。

\mathcal{H}_∞ 制御問題 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

制御対象:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h(x) + j_1(x)w + j_2(x)u \end{aligned}$$

- ✓ $x \in \mathbb{R}^n$: 状態ベクトル, $w \in \mathbb{R}^m$: 外乱などの外生信号,
- $u \in \mathbb{R}^l$: 制御入力, $z \in \mathbb{R}^p$: 評価出力
- ✓ ある平衡点 $x = 0$ が存在し, $f(0) = 0, h_1(0) = 0$

問題設定: 外乱 $w(\cdot)$ から出力 $z(\cdot)$ への \mathcal{L}_2 ゲインが, あらかじめ決定された値 $\gamma (> 0)$ 以下であるような制御入力 u を設計する。

\mathcal{H}_∞ 制御問題 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

すなわち, 評価関数

$$J(x_0, w, u) = \int_0^\infty \|z(\tau)\|^2 - \gamma^2 \|w(\tau)\|^2 d\tau, \quad x(0) = x_0$$

を考え, $x_0 = 0$ のとき J がすべての $w(\cdot) \in \mathcal{L}_2$ に対して, 非正であるような制御入力 $u = k_2(x)$ を見つける問題。

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

二人零和微分ゲーム

非線形 \mathcal{H}_∞ 制御における二人零和微分ゲーム: 一方のプレーヤーは入力 u により評価関数を最小化することを目的とし, もう一方のプレーヤーは外乱 w を制御することにより同じ評価関数を最大化することを目的とする。

すなわち,

それぞれのプレーヤーにとって最適な戦略 (=最悪外乱・制御則)

$$w = k_1^*(x), \quad u = k_2^*(x)$$

が存在し

$$J(x_0, w, k_2^*) \leq J(x_0, k_1^*, k_2^*) \leq J(x_0, k_1^*, u), \quad \forall w; \forall u \in \mathcal{U}(x_0, k_1^*)$$

とすることが可能であるならば, その k_1^*, k_2^* を見つけよ。

ここで, $\mathcal{U}(x_0, k_1^*)$ は, $w = k_1^*(x)$ のもとで, $x \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ となる $u(\cdot)$ の集合である。

ハミルトニアン関数の鞍形点 (1)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
ロバスト制御
 \mathcal{L}_2 ゲイン
散逸不等式
ハミルトン=ヤコビ不等式
安定性の条件
線形系の場合
 \mathcal{H}_∞ 制御問題
二人零和微分ゲーム
ハミルトニアンの鞍形点
HJI 方程式
二人零和微分ゲームの解
状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
出力 FB による非線形
 \mathcal{H}_∞ 制御
Backstepping
結合系の安定性

ハミルトニアン関数:

$$H(x, p, w, u) = \|h(x) + j_1(x)w + j_2(x)u\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 + p(f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u)$$

ハミルトニアン関数の (w, u) に関する鞍形点 $(w^*(x, p), u^*(x, p))$ がある (x, p) に対して唯一存在するならば、

$$H(x, p, w, u^*(x, p)) \leq H(x, p, w^*(x, p), u^*(x, p)) \leq H(x, p, w^*(x, p), u)$$

仮定: 各 x に対し、

- ✓ $R_1(x) = \gamma^2 I - j_1(x)^T j_1(x) > 0$
- ✓ $R_2(x) = j_2(x)^T j_2(x) > 0$

Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程式

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
ロバスト制御
 \mathcal{L}_2 ゲイン
散逸不等式
ハミルトン=ヤコビ不等式
安定性の条件
線形系の場合
 \mathcal{H}_∞ 制御問題
二人零和微分ゲーム
ハミルトニアンの鞍形点
HJI 方程式
二人零和微分ゲームの解
状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
出力 FB による非線形
 \mathcal{H}_∞ 制御
Backstepping
結合系の安定性

Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程式:

$$H^* \left(x, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0$$

の正定解があるものと仮定。

鞍形点の性質より

$$H \left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u^* \left(x, \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) \leq 0, \quad \forall w$$

$$H \left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w^* \left(x, \frac{\partial V}{\partial x} \right), u \right) \geq 0, \quad \forall u$$

ハミルトニアン関数の鞍形点 (2)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
ロバスト制御
 \mathcal{L}_2 ゲイン
散逸不等式
ハミルトン=ヤコビ不等式
安定性の条件
線形系の場合
 \mathcal{H}_∞ 制御問題
二人零和微分ゲーム
ハミルトニアンの鞍形点
HJI 方程式
二人零和微分ゲームの解
状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
出力 FB による非線形
 \mathcal{H}_∞ 制御
Backstepping
結合系の安定性

ハミルトニアン関数の鞍形点

$$w^*(x, p) = \frac{1}{2} \Lambda^{-1} \{ (g_1^T - \Xi g_2^T) p^T + 2(j_1^T - \Xi j_2^T) h \}$$

$$u^*(x, p) = -\frac{1}{2} \Gamma^{-1} \{ (\Omega g_1^T + g_2^T) p^T + 2(\Omega j_1^T + j_2^T) h \}$$

ただし $\Xi = j_1^T j_2 R_2^{-1}, \quad \Omega = j_2^T j_1 R_1^{-1},$
 $\Lambda = R_1 + \Xi j_2^T j_1 > 0, \quad \Gamma = R_2 + \Omega j_1^T j_2 > 0$

ハミルトニアン関数の平方完成

$$\begin{aligned} H(x, p, w, u) &= H^*(x, p) - (w - w^*)^T \Lambda (w - w^*) \\ &\quad + \{ u - u^* + \Xi^T (w - w^*) \}^T R_2 \{ u - u^* + \Xi^T (w - w^*) \} \\ &= H^*(x, p) + (u - u^*)^T \Gamma (u - u^*) \\ &\quad - \{ w - w^* + \Omega^T (u - u^*) \}^T R_1 \{ w - w^* + \Omega^T (u - u^*) \} \end{aligned}$$

二人零和微分ゲームの解 (1)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
ロバスト制御
 \mathcal{L}_2 ゲイン
散逸不等式
ハミルトン=ヤコビ不等式
安定性の条件
線形系の場合
 \mathcal{H}_∞ 制御問題
二人零和微分ゲーム
ハミルトニアンの鞍形点
HJI 方程式
二人零和微分ゲームの解
状態 $\text{FB } \mathcal{H}_\infty$ 制御
出力 FB による非線形
 \mathcal{H}_∞ 制御
Backstepping
結合系の安定性

恒等式:

$$H \left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u \right) = \frac{dV}{dt} + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2$$

積分すると

$$V(x(t_1)) - V(x_0) + \int_0^{t_1} \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 dt \leq 0, \quad \forall w; u = u^*(x, \frac{\partial V}{\partial x})$$

$$V(x(t_1)) - V(x_0) + \int_0^{t_1} \|z\|^2 - \gamma^2 \|w^*(x, \frac{\partial V}{\partial x})\|^2 dt \geq 0,$$

$$\forall u; w = w^*(x, \frac{\partial V}{\partial x})$$

u を $\mathfrak{U}(x_0, w^*(x, \partial V/\partial x))$ に限定すると、 $V(x) \geq 0$ より

$$J(x_0, w, u^*) \leq V(x_0) \leq J(x_0, w^*, u), \quad \forall w, \forall u \in \mathfrak{U}(x_0, w^*)$$

二人零和微分ゲームの解 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB}\mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

$u^* \in \mathcal{U}(x_0, w^*)$ 、つまり、 u^*, w^* のもとで系が漸近安定であるならば、 $V(x) = J(x, u^*, w^*)$ が成り立ち

$$k_1^*(x) = w^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}), \quad k_2^*(x) = u^*(x, \frac{\partial V}{\partial x})$$

は二人零和微分ゲームの解である。また、

$$J(0, w, u^*) \leq 0$$

もなりたつ。

状態フィードバックによる非線形 \mathcal{H}_∞ 制御 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB}\mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

入力なしの場合と同様に、**Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式**を使った議論に拡張できる。

Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \leq 0, \quad V(0) = 0, \quad V(x) \geq 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u^*(x, \frac{\partial V}{\partial x})) + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2$$

$$= H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) - (w - w^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}))^T R_1(x) (w - w^*(x, \frac{\partial V}{\partial x})) \leq 0$$

よって

$$\dot{V}(x) \leq \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2$$

つまり、制御則 $u = k_2(x) = u^*(x, \partial V / \partial x)$ のもとで、系は、供給率 $\gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2$ に関してストレージ関数 $V(x)$ をもち、散逸的である。

二人零和微分ゲームの解 (3)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB}\mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

定理 ランク条件の仮定が成り立ち、Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程式

$$\frac{\partial V}{\partial x} f^*(x) + h^T(x)Q(x)h(x) + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} \{ (g_1(x) - g_2(x)\Xi^T(x)) \cdot \Lambda(x)^{-1} (g_1^T(x) - \Xi(x)g_2^T(x)) - g_2(x)R_2(x)^{-1}g_2^T(x) \} \frac{\partial V^T}{\partial x} = 0$$

および境界条件 $V(0) = 0, V(x) \geq 0$ を満たす解 $V(x)$ が存在するとする。**ただし**

$$f^* = f - g_2 R_2^{-1} j_2^T h_1 + (g_1 - g_2 \Xi^T) \Lambda^{-1} (j_1^T - \Xi j_2^T) h$$

$$Q = I - j_2 R_2^{-1} j_2^T + (j_1 - j_2 \Xi^T) \Lambda^{-1} (j_1^T - \Xi j_2^T) \geq 0$$

とする。そのとき、**制御則 $u = k_2^*(x) = u^*(x, \partial V / \partial x)$ は、系の w から z までの \mathcal{L}_2 ゲインを $\gamma > 0$ 以下とする問題の解の一つである。**さらに、最適入力・最悪外乱のもとで系が漸近安定となる Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程式の解 $V(x)$ は、もし存在するならば唯一である。

状態フィードバックによる非線形 \mathcal{H}_∞ 制御 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- ロバスト制御
- \mathcal{L}_2 ゲイン
- 散逸不等式
- ハミルトン=ヤコビ不等式
- 安定性の条件
- 線形系の場合
- \mathcal{H}_∞ 制御問題
- 二人零和微分ゲーム
- ハミルトニアンの鞍形点
- HJI 方程式
- 二人零和微分ゲームの解
- 状態 $\text{FB}\mathcal{H}_\infty$ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性

定理 ランク条件および z に関するゼロ状態可検出性のもとで、Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式および境界条件の解 $V(x)$ が存在するのであれば、制御則 $u = k_2(x) = u^*(x, \partial V / \partial x)$ のもとで系は γ 以下の \mathcal{L}_2 ゲインをもつ。また、 $w = 0$ のときのフィードバック系の原点は漸近安定である。

証明 γ 以下の \mathcal{L}_2 ゲインをもつことに関しては、すでに述べられているので、漸近安定性のみを証明すればよい。 $w = 0$ のとき

$$\dot{V}(x) \leq -\|z\|^2$$

となるので、 $z \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) である。ゼロ状態可検出性より、 $z = 0$ を満たす多様体の上では $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であるので、原点は漸近安定。さらに $V(x)$ が放射状に非有界であれば、大域的漸近安定。

- ✓ ゼロ状態可検出性の代わりに厳密な HJI 不等式を考えてもよい。
- ✓ 実用上は正定な安定化解を用いたほうがよい。

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

出力フィードバックによる非線形 \mathcal{H}_∞ 制御

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

問題設定 (1)

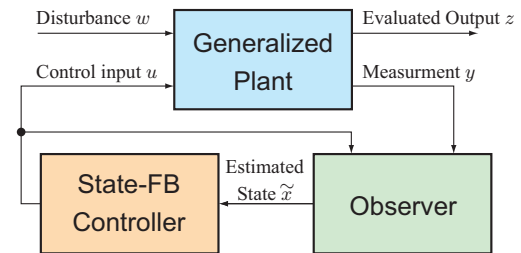
次のような状況を考える

- ✓ 全ての状態量が直接観測できない。
- ✓ 観測出力が外乱によって擾乱されている。

オブザーバによって状態を推定すればよい。

疑問点: 観測外乱によって、 \mathcal{L}_2 ゲインが達成されないのでは?

この場合の \mathcal{L}_2 ゲインは、制御対象とオブザーバの両方の初期値がゼロのときの「外乱 \Rightarrow 評価出力」の \mathcal{L}_2 ノルムの比、として定義される。



問題設定 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

一般化制御対象:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + j_{11}(x)w + j_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + j_{21}(x)w + j_{22}(x)u \end{aligned}$$

- ✓ $x \in \mathbb{R}^n$: 状態, $w \in \mathbb{R}^m$: 外乱, $u \in \mathbb{R}^l$: 制御入力
- ✓ $z \in \mathbb{R}^p$: 評価出力, $y \in \mathbb{R}^q$: 観測出力
- ✓ $f(0) = 0, h_1(0) = 0, h_2(0) = 0$

制御目的: 動的出力フィードバック則:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \delta(\xi, y) \\ u &= \alpha(\xi) \end{aligned}$$

により、閉ループ系を安定化し、かつ w から z までの \mathcal{L}_2 ゲインを γ 以下にする。

問題設定 (3)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御**
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

動的出力フィードバック則を以下の組み合わせとする。
状態フィードバック制御則に状態の推定値を代入したもの

$$u = k_2(\xi)$$

全状態オブザーバ:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi) + g_1(\xi)k_1(\xi) + g_2(\xi)k_2(\xi) \\ &\quad + G(\xi)(y - h_2(\xi) - j_{21}(\xi)k_1(\xi) - j_{22}(\xi)k_2(\xi)) \end{aligned}$$

ここで,

$$k_1(\xi) = w^*(\xi, \partial V(\xi) / \partial \xi)$$

- ✓ 後は、問題設定を満たす $G(\cdot)$ を見つければよい。
- ✓ 以降では、簡単のため、 $j_{11} = 0, j_{22} = 0$ とする。

問題の変形 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

オブザーバ:

$$\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi) + g_2(\xi)k_2(\xi) + G(\xi)(y - \tilde{h}_2(\xi))$$

ここで

$$\tilde{f}(\xi) = f(\xi) + g_1(\xi)k_1(\xi)$$

$$\tilde{h}_2(\xi) = h_2(\xi) + j_{21}(\xi)k_1(\xi)$$

閉ループ系が満たすべき条件 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

状態 FB のための Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式:

$$\frac{\partial V}{\partial x} (f - g_2 R_2^{-1} j_{12}^T h_1) + h_1^T (I - j_{12} R_2^{-1} j_{12}^T) h_1 + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 R_2^{-1} g_2^T \right\} \frac{\partial V}{\partial x} \leq 0$$

準正定解 $V(x)$ は、推定値を用いた制御則 $u = k_1(\xi)$ のもとでは、**もはやストレージ関数ではない。**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u) + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \\ = H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u) = H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) + \|j_{12}(x)v\|^2 - \gamma^2 \|r\|^2 \\ \leq \|j_{12}(x)v\|^2 - \gamma^2 \|r\|^2 \end{aligned}$$

赤文字の部分を負にしたい (初期状態ゼロのとき)。

問題の変形 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

閉ループ系 (= 制御対象 + オブザーバ + 制御則):

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= f_E(x_E) + g_E(x_E)r \\ z &= h_{E1}(x_E) \\ v &= h_{E2}(x_E) \end{aligned}$$

ただし、 $x_E = (x^T, \xi^T)^T$: 拡張系の状態変数,
 v : 状態フィードバックを用いたときの入力と実際の u との差,
 $r = w - k_1(x)$: 実際の外乱 w と最悪外乱との差

$$\begin{aligned} f_E(x_E) &= \begin{pmatrix} \tilde{f}(x) + g_2(x)k_2(\xi) \\ \tilde{f}(\xi) + g_2(\xi)k_2(\xi) + G(\xi)(\tilde{h}_2(x) - \tilde{h}_2(\xi)) \end{pmatrix} \\ g_E(x_E) &= \begin{bmatrix} g_1(x) \\ G(\xi)j_{21}(x) \end{bmatrix} \\ h_{E1}(x_E) &= h_1(x) + j_{12}(x)k_2(\xi) \\ h_{E2}(x_E) &= k_2(x) - k_2(\xi) \end{aligned}$$

閉ループ系が満たすべき条件 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

r から $j_{12}(x)v$ への \mathcal{L}_2 ゲインを γ 以下にすればよい。

散逸不等式:

$$\frac{\partial W}{\partial x_E} (f_E(x_E) + g_E(x_E)r) \leq \gamma^2 \|r\|^2 - \|j_{12}(x)v\|^2$$

より、

$2n$ 次元の Hamilton-Jacobi 不等式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_E} f_E(x_E) + h_{E2}^T(x_E) R_2(x) h_{E2}(x_E) \\ + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial W}{\partial x_E} g_E(x_E) g_E^T(x_E) \frac{\partial W}{\partial x_E} \leq 0 \\ W(x_E) \geq 0, \quad W(0) = 0 \end{aligned}$$

この解が存在するような $G(\cdot)$ があればよい。

閉ループ系の性質 (1)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
問題設定
問題の変形
閉ループ系の条件
閉ループ系の性質
HJ 不等式の低次元化
観測器ゲインの決定
最終的な HJ 不等式
Backstepping
結合系の安定性

新たなストレージ関数:

$$U(x_E) = W(x_E) + V(x)$$

拡大系の散逸不等式:

$$\frac{\partial U}{\partial x_E}(f_E(x_E) + g_E(x_E)r) \leq -\gamma^2 \|w\|^2 + \|z\|^2$$

閉ループ系において、 $U(x_E)$ は供給率 $\gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2$ に関するストレージ関数。
⇒ よって、系は γ 以下の \mathcal{L}_2 ゲインをもつ。

閉ループ系の性質 (2)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
問題設定
問題の変形
閉ループ系の条件
閉ループ系の性質
HJ 不等式の低次元化
観測器ゲインの決定
最終的な HJ 不等式
Backstepping
結合系の安定性

定理:

- 状態 FB の項で述べたランク条件, ゼロ状態可検出性が満たされ、Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式の解 $V(x)$ が存在。
- $W(x_E), G(\xi)$ が存在し前ページの $2n$ 次元 Hamilton-Jacobi 不等式, および境界条件を満たす。
- システム

$$\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi) - G(\xi)\tilde{h}_2(\xi)$$

の平衡点 $\xi = 0$ は局所漸近安定。

ならば, 閉ループ系は γ 以下の \mathcal{L}_2 ゲインをもち, $w = 0$ のとき平衡点 $x_E = (0, 0)^T$ は局所漸近安定である。

なお, $V(x)$ が安定化解であれば, 最悪外乱下でも漸近安定。

閉ループ系の性質 (3)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
問題設定
問題の変形
閉ループ系の条件
閉ループ系の性質
HJ 不等式の低次元化
観測器ゲインの決定
最終的な HJ 不等式
Backstepping
結合系の安定性

証明: γ 以下の \mathcal{L}_2 ゲインをもつことは先に述べたので, $w = 0$ のときの安定性について証明する。散逸不等式より, $w = 0$ のとき

$$\frac{dU(x_E(t))}{dt} \leq -\|z\|^2 = -\|h_1(x) + j_{12}(x)k_2(\xi)\|^2$$

$\dot{U} \equiv 0$ となる軌道を Ω とおくと, Ω 上では, $z \equiv 0$ となっていなくてはならない。ゼロ状態可検出の仮定より, Ω 上では, $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) である。仮定より $j_{12}(x)$ は列フルランクであり, また, Ω 上で $h_1(x) + j_{12}(x)k_2(\xi) = 0$ ($x \rightarrow 0$) であるから $k_2(\xi(t)) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となる。よって, Ω 上では, オブザーバのダイナミクスは,

$$\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi) - G(\xi)\tilde{h}_2(\xi)$$

に漸近する。3 番目の仮定より, 原点近傍に初期点をもち Ω 上を動く軌道上では, $\xi \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となる。よって, 不変原理より局所漸近安定性が証明された。

Hamilton-Jacobi 不等式の低次元化 (1)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
問題設定
問題の変形
閉ループ系の条件
閉ループ系の性質
HJ 不等式の低次元化
観測器ゲインの決定
最終的な HJ 不等式
Backstepping
結合系の安定性

- この段階の Hamilton-Jacobi 不等式は $2n$ 次元の空間上での偏微分不等式。
- Hamilton-Jacobi 不等式に未定ゲイン $G(\cdot)$ が含まれている。

オブザーバストレージ関数を $W(x_E) = Q(x - \xi)$ の形に限る。ただし, $Q(0) = 0, Q(e) \geq 0$

$e = x - \xi$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial e} & (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(\xi) + (g_2(x) - g_2(\xi))k_2(\xi) \\ & - G(\xi)(\tilde{h}_2(x) - \tilde{h}_2(\xi))) \\ & + (k_2(x) - k_2(\xi))^T R_2(x)(k_2(x) - k_2(\xi)) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q}{\partial e} (g_1(x) - j_{21}^T(x)G^T(\xi)) \\ & (g_1(x) - j_{21}^T(x)G^T(\xi))^T \frac{\partial Q}{\partial e} \leq 0 \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi 不等式の低次元化 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

この不等式の左辺に $x = \xi + e$ を代入したものを、 $K(e, \xi)$ とおく。

✓ 境界条件から、 $\partial Q / \partial e|_{e=0} = 0$ は明らかなので

$$K(0, \xi) = 0, \quad \left. \frac{\partial K}{\partial e} \right|_{e=0} = 0$$

✓ $K(e, \xi)$ の $(0, 0)$ における Hessian 行列は

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial e^2} \right|_{e=0} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) - G(0) \frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x}(0) \right) + \frac{\partial k_2^T}{\partial x}(0) R_2(0) \frac{\partial k_2}{\partial x}(0) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial e^2} \right|_{e=0} (g_1(0) - j_{21}^T(0) G^T(0)) \\ & (g_1(0) - j_{21}^T(0) G^T(0))^T \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial e^2} \right|_{e=0} \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi 不等式の低次元化 (4)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

証明 まず、 $2n$ 次元版の Hamilton-Jacobi 不等式が満たされることを示す。 $K(0, \xi) = 0$, $(\partial K / \partial e)|_{e=0} = 0$ より連続な行列 $R(e, \xi)$ が存在して $K(e, \xi) = e^T R(e, \xi) e$ と表現できる。 $R(e, \xi) < 0$ ならば $2n$ 次元版の Hamilton-Jacobi 不等式が満たされる。 $R(0, 0)$ は、 $(0, 0)$ における $K(e, \xi)$ の e に関する Hessian 行列と一致するはずである。一方、 n 次元版の Hamilton-Jacobi 不等式の左辺の $e = 0$ における Hessian 行列 $\partial^2 S / \partial e^2$ も、 $(0, 0)$ における $K(e, \xi)$ の e に関する Hessian 行列と一致することを計算によって確かめることが可能である。よって、 $R(e, \xi)$ は原点近傍では負定な行列である。したがって、 $K(e, \xi)$ は $e = 0$ を除く原点近傍においては負の値をもち、局所的に $2n$ 次元版の Hamilton-Jacobi 不等式が満たされることが証明された。

また、Hamilton-Jacobi 不等式よりただちに

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial e} \right|_{e=\xi} (\tilde{f}(\xi) - G(\xi) \tilde{h}_2(\xi)) < 0, \quad (\xi \neq 0)$$

が導かれ、 Q が Ω 上の最大不変集合に制約された系の Lyapunov 関数であることは明らかである。

Hamilton-Jacobi 不等式の低次元化 (3)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

定理

1. 状態 FB の項で述べたランク条件、ゼロ状態可検出性が満たされ、Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式の C^3 解 $V(x)$ が存在。
2. ある微小な $\epsilon > 0$ が存在し、

$$\begin{aligned} S(e) &= \frac{\partial Q}{\partial e} (\tilde{f}(e) - G(e) \tilde{h}_2(e)) + k_2^T(e) R_2(e) k_2(e) \\ &+ \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q}{\partial e} (g_1(e) - G(e) j_{21}(e)) \\ &\quad (g_1(e) - G(e) j_{21}(e))^T \frac{\partial Q}{\partial e} \\ &\leq -\epsilon e^T e < 0, \quad (e \neq 0) \end{aligned}$$

を満たす C^3 解 $Q(e) (\geq 0)$ が存在。

ならば、 $W(x_E) = Q(x - \xi)$ は局所的に $2n$ 次元版の定理の 2, 3 の条件を満たす。

観測器ゲインの決定 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

HJ 不等式の左辺 S を最小化するという意味で最適な $G(\cdot)$ を求めたい。

仮定: 行列、 $R_3(x) = j_{21}(x) j_{21}^T(x)$ は正則 (正定) である。

$G(x)$ が含まれる項に関して平方完成:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \tilde{f}(x) + k_2^T(x) R_2(x) k_2(x) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q(x)}{\partial x} g_1(x) g_1^T(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} (\lambda(x) - B^T(x) R_3^{-1}(x)) R_3(x) (\lambda(x) - B^T(x) R_3^{-1}(x))^T \\ & - \frac{1}{4\gamma^2} B^T(x) R_3^{-1}(x) B(x) < 0, \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

ただし、 e を x に置換し

$$\lambda(x) = \frac{\partial Q(x)}{\partial x} G(x), \quad B(x) = 2\gamma^2 \tilde{h}_2(x) + j_{21}(x) g_1^T(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x}$$

とおいた。

観測器ゲインの決定 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

赤字の部分でゼロに出来れば、 $G(x)$ の決定と HJ 不等式を分離できる。

$S(x)$ を最小化するという意味では

$$\lambda(x) - B^T(x)R_3^{-1}(x) = \frac{\partial Q(x)}{\partial x}G(x)$$

$$- (2\gamma^2\tilde{h}_2^T(x) + \frac{\partial Q(x)}{\partial x}g_1(x)j_{21}^T(x))R_3^{-1}(x) = 0$$

を満たす $G(x)$ が (もし存在すれば) 最適。

$G(x)$ の存在のために、

$$\frac{\partial Q}{\partial x}L(x) = \tilde{h}_2^T(x)$$

なる連続な関数を成分とする $n \times q$ 行列 $L(x)$ が存在することが必要十分である。

最終的なオブザーバ Hamilton-Jacobi 不等式 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

このような $G(x)$ のもとでの Hamilton-Jacobi 不等式:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x}\tilde{f}(x) + k_2^T(x)R_2(x)k_2(x) + \frac{1}{4\gamma^2}\frac{\partial Q(x)}{\partial x}g_1(x)g_1^T(x)\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$$

$$- \frac{1}{4\gamma^2}B^T(x)R_3^{-1}(x)B(x) < 0, \quad (x \neq 0)$$

この式はさらに

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x}(\tilde{f}(x) - g_1(x)j_{21}^T(x)R_3^{-1}(x)\tilde{h}_2(x))$$

$$+ k_2^T(x)R_2(x)k_2(x) - \gamma^2\tilde{h}_2^T(x)R_3^{-1}(x)\tilde{h}_2(x)$$

$$+ \frac{1}{4\gamma^2}\frac{\partial Q(x)}{\partial x}g_1(x)(I_m - j_{21}^T(x)R_3^{-1}(x)j_{21}(x))g_1^T(x)\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$$

$$< 0 \quad (x \neq 0)$$

と変形できる。

観測器ゲインの決定 (3)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

$\partial Q(x)/\partial x$ は

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = x^T M(x)$$

と書くことができる。

一方、 $\tilde{h}_2^T(x) = x^T N(x)$ のように表わすこともできる。

最適な $G(x)$:

$M(x)$ が $x = 0$ の近傍で正則であるならば、

$$L(x) = M^{-1}(x)N(x)$$

$$G(x) = (2\gamma^2L(x) + g_1(x)j_{21}^T(x))R_3^{-1}(x)$$

のように $G(x)$ は求まる。

最終的なオブザーバ Hamilton-Jacobi 不等式 (2)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 問題設定
- 問題の変形
- 閉ループ系の条件
- 閉ループ系の性質
- HJ 不等式の低次元化
- 観測器ゲインの決定
- 最終的な HJ 不等式
- Backstepping
- 結合系の安定性

最終的なオブザーバ Hamilton-Jacobi 不等式の解 $Q(\cdot)$ に対して、 $M(x)$ が正則ならば、 $G(x)$ が存在し、 $(Q(\cdot), G(x))$ は n 次元版 Hamilton-Jacobi 不等式を満たす。

実は、以上の手順は“拡張カルマンフィルタ”の構成法と一致している。

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping**
- Backstepping とは
- St. fdbk. sys.
- Σ_1 の仮定
- Σ_2 の安定化
- Σ_3 の安定化
- 全体の漸近安定化
- 結合系の安定性

Backstepping

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping**
- Backstepping とは
- St. fdbk. sys.
- Σ_1 の仮定
- Σ_2 の安定化
- Σ_3 の安定化
- 全体の漸近安定化
- 結合系の安定性

バックステッピング (Backstepping) とは

- ✓ **Strict feedback system** とよばれるクラスのシステムに対する、漸近安定化アルゴリズム。
- ✓ 入れ子状の複数のサブシステムを考え、仮想入力により一番内側のサブシステムから順次、漸近安定化を行う。
- ✓ リアプノフ関数を用いて各サブシステムの漸近安定化を考える。
- ✓ 最終的に、原点で Hessian が退化しないリアプノフ関数が得られる。

Strict feedback system

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping**
- Backstepping とは
- St. fdbk. sys.
- Σ_1 の仮定
- Σ_2 の安定化
- Σ_3 の安定化
- 全体の漸近安定化
- 結合系の安定性

制御対象は、Strict feedback system:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{s-1} &= f_{s-1}(x_1, \dots, x_{s-1}) + g_{s-1}(x_1, \dots, x_{s-1})x_n \\ \dot{x}_s &= f_s(x) + g_s(x)u \end{aligned}$$

- ✓ 入れ子状になったサブシステム。
- ✓ サブシステム Σ_k の仮想入力は x_{k+1} 。ただし、サブシステム Σ_n (=制御対象全体) の入力は仮想入力ではなく、真の入力 u 。
- ✓ $\dim x_1 \geq \dim x_2 = \dim x_3 = \dots = \dim x_s$ 。
- ✓ 行列 $g_2(x_1, x_2), \dots, g_s(x)$ は正則。

サブシステム Σ_1 に対する仮定

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping**
- Backstepping とは
- St. fdbk. sys.
- Σ_1 の仮定
- Σ_2 の安定化
- Σ_3 の安定化
- 全体の漸近安定化
- 結合系の安定性

- ✓ 一番内側のサブシステム Σ_1

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)v_1$$

- (x_2 は仮想入力 v_1 に置き換えられている。)
- ✓ 仮定: サブシステム Σ_1 は、
 - ✗ 仮想フィードバック $v_1 = \alpha_1(x_1)$ によって大域的漸近安定化可能であり、
 - ✗ 放射状に非有界で正定なリアプノフ関数 $V_1(x_1)$ が得られている、
 と仮定する。
- ✓ すなわち、

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(f_1 + g_1\alpha_1) < 0 \quad (x_1 \neq 0)$$

サブシステム Σ_2 の漸近安定化 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping**
- Backstepping とは
- St. fdbk. sys.
- Σ_1 の仮定
- Σ_2 の安定化
- Σ_3 の安定化
- 全体の漸近安定化
- 結合系の安定性

次に、サブシステム Σ_2 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)v_2\end{aligned}$$

の漸近安定化を考える。

- ✓ Σ_2 においては、 Σ_1 の仮想入力 v_1 は状態 x_2 に戻っている。そこで、偏差、

$$z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1)$$

を導入する。

- ✓ 次に、リアプノフ関数

$$V_2(x_1, z_2) = V_1(x_1) + \frac{\gamma_2}{2} z_2^T z_2$$

を考える。

サブシステム Σ_2 の漸近安定化 (2)

リアプノフ関数の微分:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \{f_1 + g_1 \alpha_1\} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g_1 z_2 + \gamma_2 z_2^T \left\{ (f_2 + g_2 v_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (f_1 + g_1 x_2) \right\} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \{f_1 + g_1 \alpha_1\} + z_2^T \left\{ g_1^T \left[\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right]^T + \gamma_2 (f_2 + g_2 v_2) - \gamma_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (f_1 + g_1 x_2) \right\}\end{aligned}$$

< 0 ($x_1 \neq 0$) 括弧することができる ここを $-k_2 z_2$ に出来れば都合がよい
よって、

$$g_1^T \left[\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right]^T + \gamma_2 (f_2 + g_2 v_2) - \gamma_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (f_1 + g_1 x_2) = -k_2 z_2 = -k_2 (x_2 + \alpha(x_1))$$

を v_2 に関して解くと、 Σ_2 の大域的漸近安定化制御則が得られる。

$$v_2 = \alpha_2(x_1, x_2)$$

サブシステム Σ_3 の漸近安定化 (1)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
- Backstepping**
- Backstepping とは
- St. fdbk. sys.
- Σ_1 の仮定
- Σ_2 の安定化
- Σ_3 の安定化
- 全体の漸近安定化
- 結合系の安定性

同様に、サブシステム Σ_3 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)v_3\end{aligned}$$

の漸近安定化を考える。

仮想入力との偏差:

$$z_3 = x_3 - \alpha_2(x_1, x_2)$$

リアプノフ関数:

$$V_3(x_1, z_2, z_3) = V_2(x_1, z_2) + \frac{\gamma_3}{2} z_3^T z_3$$

簡単化のため、以下のようにおく。

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1 + g_1 x_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

サブシステム Σ_3 の漸近安定化 (2)

リアプノフ関数の微分:

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= \frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} \{\bar{f}_2 + \bar{g}_2 \alpha_2\} + \frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} \bar{g}_2 z_3 + \gamma_3 z_3^T \left\{ (f_3 + g_3 v_3) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}_2} (\bar{f}_2 + \bar{g}_2 x_3) \right\} \\ &= \frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} \{\bar{f}_2 + \bar{g}_2 \alpha_2\} + z_3^T \left\{ \bar{g}_2^T \left[\frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} \right]^T + \gamma_3 (f_3 + g_3 v_3) - \gamma_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}_2} (\bar{f}_2 + \bar{g}_2 x_3) \right\}\end{aligned}$$

< 0 ($\bar{x}_2 \neq 0$) 括弧することができる ここを $-k_3 z_3$ に出来れば都合がよい
よって、

$$\bar{g}_2^T \left[\frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} \right]^T + \gamma_3 (f_3 + g_3 v_3) - \gamma_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{x}_2} (\bar{f}_2 + \bar{g}_2 x_3) = -k_3 z_3 = -k_3 (x_3 + \alpha_2)$$

を v_3 に関して解くと、 Σ_3 の大域的漸近安定化制御則が得られる。

$$v_3 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3)$$

システム全体の漸近安定化—「Backstepping」のまとめ

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 H_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 H_∞ 制御
- Backstepping**
- Backstepping とは
- St. fdbk. sys.
- Σ_1 の仮定
- Σ_2 の安定化
- Σ_3 の安定化
- 全体の漸近安定化
- 結合系の安定性

- ✓ 以上の手順を繰り返せば、システム全体を大域的漸近安定化可能。
- ✓ 拡大系のリアプノフ関数が得られるのが利点。
- ✓ 最初のリアプノフ関数 V_1 の原点における Hessian が正則であれば、最終的に得られるリアプノフ関数 V_s の原点における Hessian も正則。
- ✓ Σ_1 の制御則 $\alpha_1(x_1)$ が Σ_1 を局所指数安定化するなら、最終的に得られる制御則 $u = \alpha_s(x)$ はシステムを大域的漸近安定化かつ局所指数安定化する。

カスケード接続 (復習)

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 H_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 H_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性**
- カスケード接続 (復習)
- カスケード接続
- もう 1 つの十分条件
- ISS スモールゲイン定理

- ✓ **Vidyasagar の補題:** システム

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ \dot{z} &= g(z) + \gamma(x, z)x\end{aligned}$$

において、 $\dot{x} = f(x)$ および $\dot{z} = g(z)$ は局所漸近安定で、 $\gamma(x, z)$ は微分可能とする。そのとき、システム全体も**局所漸近安定である**。

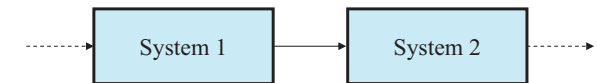
- ✓ しかし、 $\dot{x} = f(x)$, $\dot{z} = g(z)$ が大域的漸近安定であってもシステム全体が**大域的漸近安定であるとは限らない**。

結合系の安定性

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 H_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 H_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性**
- カスケード接続 (復習)
- カスケード接続
- もう 1 つの十分条件
- ISS スモールゲイン定理

カスケード接続

- 入力=状態安定性 (ISS)
- 最適制御
- 非線形最適レギュレータ
- 非線形 H_∞ 制御
- 出力 FB による非線形 H_∞ 制御
- Backstepping
- 結合系の安定性**
- カスケード接続 (復習)
- カスケード接続
- もう 1 つの十分条件
- ISS スモールゲイン定理



$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ \dot{z} &= g(z) + \gamma(x, z)x\end{aligned}$$

もし、システム 1 が大域的漸近安定で、システム 2 が ISS なら、全系は大域的漸近安定。

カスケード接続 (続き)

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
Backstepping
結合系の安定性
カスケード接続 (復習)
カスケード接続
もう 1 つの十分条件
ISS スモールゲイン定理

証明: 放射状に非有界な Lyapunov 関数 $V_1(x), V_2(z)$ が存在し、

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= L_f V_1 \leq -c(\|x\|) \\ \dot{V}_2 &= L_g V_2 + L_\gamma V_2 \cdot x \leq -a(\|z\|) + b(\|x\|)\end{aligned}$$

となる。ただし、 a, b, c はクラス \mathcal{K}_∞ 。さらに、クラス \mathcal{K}_∞ 関数 k_1, k_2, k_3, k_4 が存在して、 $k_1(\|x\|) \leq V_1(x) \leq k_2(\|x\|), k_3(\|z\|) \leq V_2(z) \leq k_4(\|z\|)$ となる。クラス \mathcal{K}_∞ 関数 χ を、

$$a^{-1} \circ b(\|x\|) < \chi(\|x\|), \quad \|z\| \neq 0$$

となる関数とおく。すると新しい Lyapunov 関数 $W = F(V_1) + G(V_2) + V_1$ は全系のリアプノフ関数である。ただし、

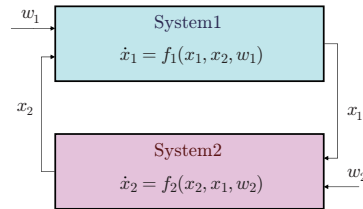
$$F(v) = \int_0^v b \circ k_2^{-1}(s) ds, \quad G(v) = \int_0^v c \circ \chi^{-1} \circ k_4^{-1}(s) ds$$

である。

ISS スモールゲイン定理

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
Backstepping
結合系の安定性
カスケード接続 (復習)
カスケード接続
もう 1 つの十分条件
ISS スモールゲイン定理

右のシステム 1,2 は ISS であるものとする。すなわち、クラス \mathcal{K}_∞ 関数 $\chi_1, \chi_{1w}, \chi_2, \chi_{2w}$ 、およびクラス \mathcal{KL} 関数 β_1, β_2 が存在して、



$$\begin{aligned}\|x_1(t)\| &\leq \beta_1(x_1(0), t) + \chi_1(\sup \|x_2\|) + \chi_{1w}(\sup \|w_1\|) \\ \|x_2(t)\| &\leq \beta_2(x_2(0), t) + \chi_2(\sup \|x_1\|) + \chi_{2w}(\sup \|w_2\|)\end{aligned}$$

と書けるものとする。このとき、クラス \mathcal{K}_∞ 関数 $\eta_1(\cdot), \eta_2(\cdot)$ が存在し、

$$\begin{aligned}(\text{Id} + \eta_1) \circ \chi_1 \circ (\text{Id} + \eta_2) \circ \chi_2(s) &\leq s \\ (\text{Id} + \eta_2) \circ \chi_2 \circ (\text{Id} + \eta_1) \circ \chi_1(s) &\leq s\end{aligned} \quad \forall s > 0$$

ならば、相互接続した系は w_1, w_2 に関して ISS となる。

一巡した ISS ゲインが 1 未満なら、安定。→ **ISS スモールゲイン定理**

もう 1 つの十分条件

入力=状態安定性 (ISS)
最適制御
非線形最適レギュレータ
非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
出力 FB による非線形 \mathcal{H}_∞ 制御
Backstepping
結合系の安定性
カスケード接続 (復習)
カスケード接続
もう 1 つの十分条件
ISS スモールゲイン定理

ピーキングを起こさない十分条件: 滑らかなシステム

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ \dot{z} &= g(z) + \gamma(x, z)x\end{aligned}$$

が大域的漸近安定となるための十分条件は

1. システム $\dot{x} = f(x)$ が大域的漸近安定で、 $\alpha(\cdot), M_0(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty, k_0 > 0$ が存在し、 $\|x(t)\| \leq \alpha(M_0(x(0))) \exp(-k_0 t)$ 。
2. システム 2 が iISS。すなわち、放射状に非有界で正定な iISS リアプノフ関数 $V_2(z)$ が存在し、

$$\dot{V}_2(x, z) \leq -a(\|z\|) + b(\|x\|), \quad a(\cdot) : \text{正定}, b(\cdot) \in \text{class-}\mathcal{K}$$

3. $b(s)$ が次を満たす:

$$\int_0^1 \frac{b(\alpha(s))}{s} ds < \infty$$

上記に加え、システム 1 が局所指数安定 ($\alpha = \text{Id}$) で、システム 2 が x に関して線形ならば、最後の積分条件は必ず満たされる。