「システム制御理論特論」(前半)

北海道大学 大学院情報科学研究科　　山下　裕

2014 年前期

はじめに

非線形システム制御を解説。
特にリアプノフ関数に基づいた方法を中心に講義する。

非線形システムの基礎　非線形システムのシステム表現, 多様体上のベクトル場, 微分方程式の解の存在と一意性
厳密線形化による制御　入出力厳密線形化，ゼロダイナミクス，ピーキング現象，状態厳密線形化
リアプノフ関数を用いた制御　リアプノフ安定論, 散逸不等式, 受動性, 入力-状態安定性 (ISS)、Sontag 型制御則
最適レギュレータ　最適制御問題，最適レギュレータ，Hamilton-Jacobi 方程式，逆最適制御
非線形 H^∞ 制御　L_2-ゲインと散逸不等式, Hamilton-Jacobi-Issacs 方程式，非線形 H^∞ 制御
カスケード接続と相互接続　ピーキング現象, カスケード接続の大域的安定性, 相互接続と ISS, ISS 小ゲイン定理
安定化手法　Strict Feedback Form, バックステッピング, 準大域的安定化

講義資料について

講義資料は、

http://stlab.ssi.ist.hokudai.ac.jp/yuhyama/lecture/tokuron/

にある。

随時訂正があるので、最新版を参照すること。

非線形システムの表現

連続時間非線形システム

✔ **Affine System (よく研究されている)**

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i$$

$$y = h(x)$$

$x \cdots$ **状態量**, $u(\in \Re^m) \cdots$ **入力**, $y(\in \Re^\ell) \cdots$ **出力**

非線形常微分方程式系

連続時間非線形システム

✔ **Affine System (よく研究されている)**

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i$$
$$y = h(x)$$

x $\cdots$ **状態量**, $u(\in \Re^m)$ $\cdots$ **入力**, $y(\in \Re^\ell)$ $\cdots$ **出力**

✔ **General Nonlinear System**

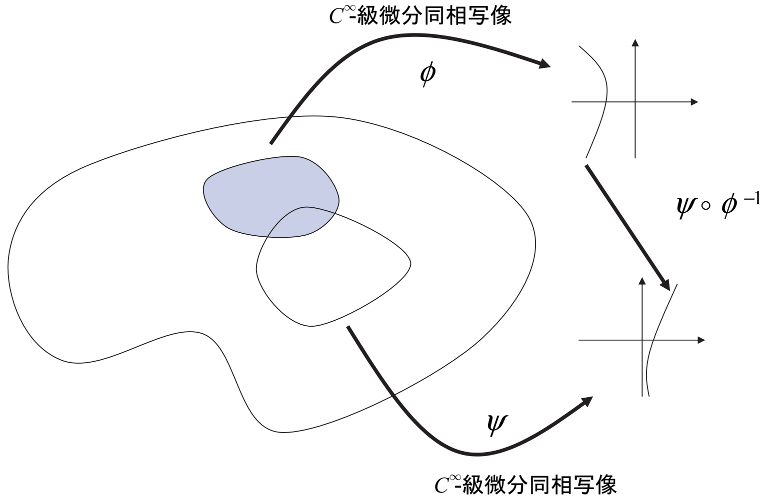
$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = h(x)$$

x $\cdots$ **状態量**, $u(\in \Re^m)$ $\cdots$ **入力**, $y(\in \Re^\ell)$ $\cdots$ **出力**

非線形系の状態空間

システムの状態 x は n 次元 C^∞ 多様体の上の 1 点

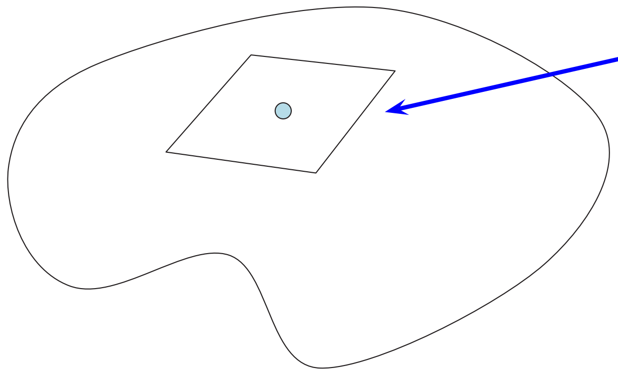
C^∞ 多様体 $\cdots$ 次元が一定の滑らかな超曲面。
無限回の微分操作ができる。



- ✔ 多様体 $\mathcal{M}$ の各々の局所近傍は、$\Re^n$(= n 次元ユークリッド空間) に C^∞ 級微分同相 (**局所座標系**)
- ✔ 近傍同士が重なったところには、C^∞ 級微分同相写像が定義できる。(**座標変換**)
- ✔ このような近傍ですべてを覆うことができる。

接平面

x は多様体の一点。では、$\dot{x}$ は?



点 pにおける**接平面は $\Re^n$ に同相**

$$T_p\mathcal{M} \approx \Re^n$$

全ての点における接平面を合わせたものを $T\mathcal{M}$ という。

x も $\dot{x}$ も局所的には n 次元であるが、

$$x \in \mathcal{M}, \quad (x, \dot{x}) \in T\mathcal{M}$$

- ✔ 数学的には $\dot{x}$ は x とペアにしないとその具体的な量には意味がないが、実際は、単独で $\dot{x}$ を扱えるよう、x に何らかの座標を決めて自然に誘導される $\dot{x}$ の座標を用いることが多い。
- ✔ 局所的には、$T\mathcal{M}|_U = M_U \times \Re^n$ のような直積の構造をもつが、大域的にはそうではない。「捩れ」が入ることがある。

接平面 (3 次元の回転運動の例)

剛体の 3 次元の姿勢は、行列式が正 (鏡像変換なし) の直交行列 $R \in SO(3)$ で表現される。

$$R^T R = I, \qquad \det R = 1$$

$\Rightarrow$ **自由度は 3**

運動方程式:

$$\dot{R} = S(\omega) R$$

接平面 (3 次元の回転運動の例)

剛体の 3 次元の姿勢は、行列式が正 (鏡像変換なし) の直交行列 $R \in SO(3)$ で表現される。

$$R^T R = I, \qquad \det R = 1$$

$\Rightarrow$ **自由度は 3**

運動方程式:

$$\dot{R} = S(\omega) R$$

R を固定したときの $\dot{R}$ は 3 次元ベクトル空間 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ でパラメータ化される。

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

剛体の 3 次元の姿勢は、行列式が正 (鏡像変換なし) の直交行列 $R \in SO(3)$ で表現される。

$$R^T R = I, \qquad \det R = 1$$

$\Rightarrow$ **自由度は 3**

運動方程式:

$$\dot{R} = S(\omega) R$$

R を固定したときの $\dot{R}$ は 3 次元ベクトル空間 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ でパラメータ化される。

ω が決まっても R が決まらなければ、$\dot{R}$ は決定できない。

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

「非線形システムの表現」まとめ

- ✔ 非線形の連立一階微分方程式において、入力に関して 1 次の Affine System がよく使われる。
- ✔ 状態 x は、一般にはベクトル空間ではなく、n 次元可微分多様体上の点である。
- ✔ 一方、$\dot{x}$ は、x を固定したとき、n 次元のユークリッド空間に含まれる。
- ✔ $\dot{x} = f(x)$ の右辺 $f(x)$ は「ベクトル場」と呼ばれる。

微分方程式の解の存在と一意性

微分方程式の解

問題:

微分方程式、

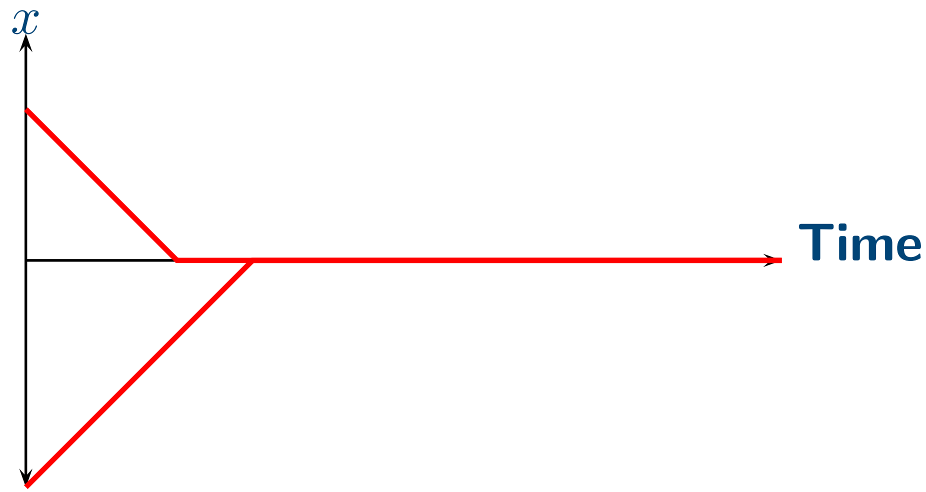
$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Re^n$$

および初期条件 $x(0) = x_0$ が与えられているとき、解 $x(t)$ $(t \geq 0)$ を求めよ。

- ✔ そもそも解が**存在**するか?
- ✔ 解が存在するとして、それは**一意**か?

解が存在しない例としては、

$$\dot{x} = \begin{cases} -1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

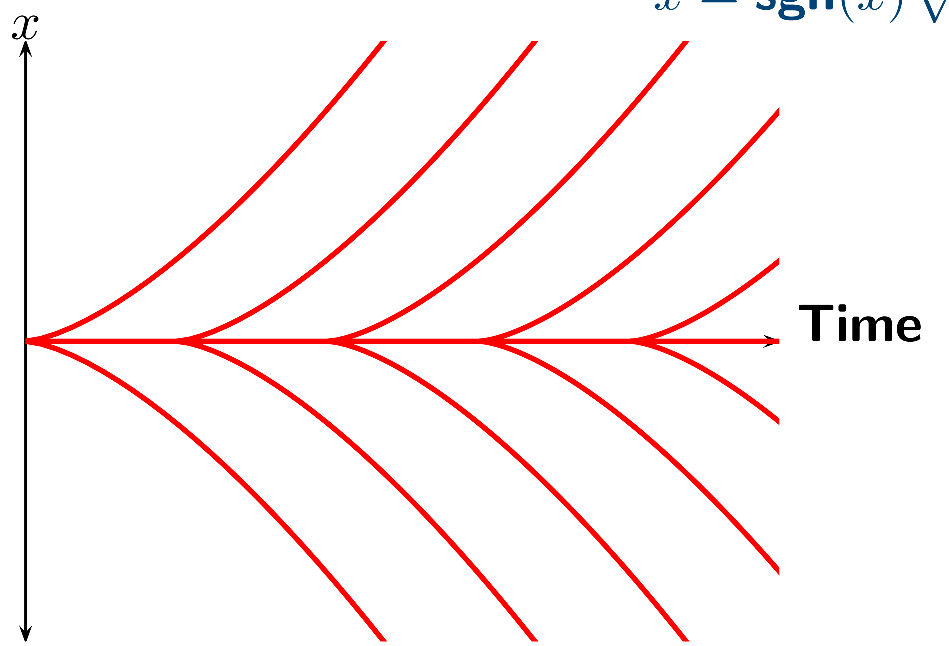


一見、$x = 0$ に最後は停留するはず。そのときは $\dot{x} = 0$ のはず。
しかし、元の微分方程式の右辺に代入すると、$\dot{x} = -1$。

解が一意でない例

解が一意でない例としては、

$$\dot{x} = \mathbf{sgn}(x)\sqrt[3]{|x|}$$



$x = 0$ から出発した場合、解が無数にある。

Lipschitz 条件

定義:

$f(x)$ が、領域 U で Lipschitz 条件を満たしているとは、

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$$

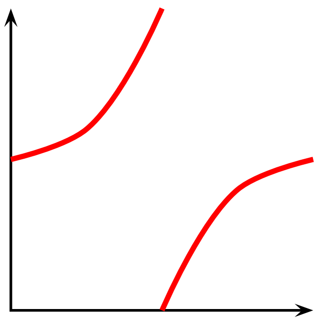
なる $M(>0)$ **が存在**することである。

$\Rightarrow$ 微分可能性を弱めた概念

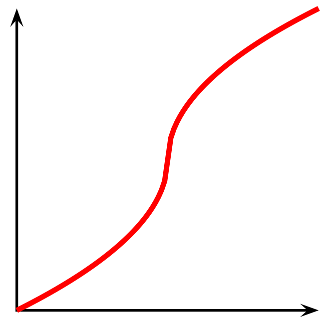
もし、全空間 (たとえば $\Re^n$) で Lipschitz 条件を満たすならば、大域的 Lipschitz 条件を満たす、あるいは単に、$f(x)$ は大域的 Lipschitz であるという。

全ての点 x に対し、近傍 U_x が存在し、U_x 上で Lipschitz であるならば、$f(x)$ は局所 Lipschitz であるという。(各 U_x で、M の値は異なってもよい。)

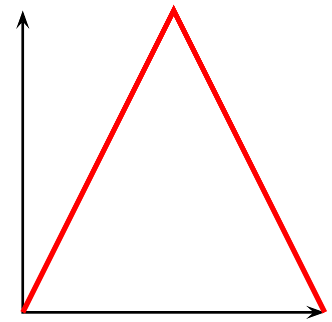
Lipschitz 条件の例



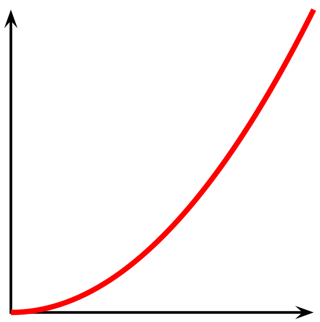
Lipschitz でない $=$ 不連続



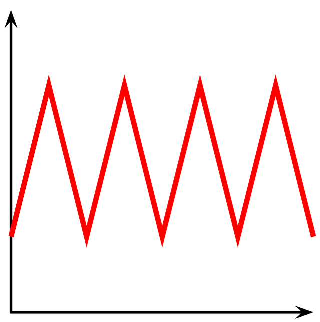
連続であるが Lipschitz でない



Lipschitz 条件を満たしている



局所 Lipschitz だが大域的に Lipschitz でない ($y = x^2$)

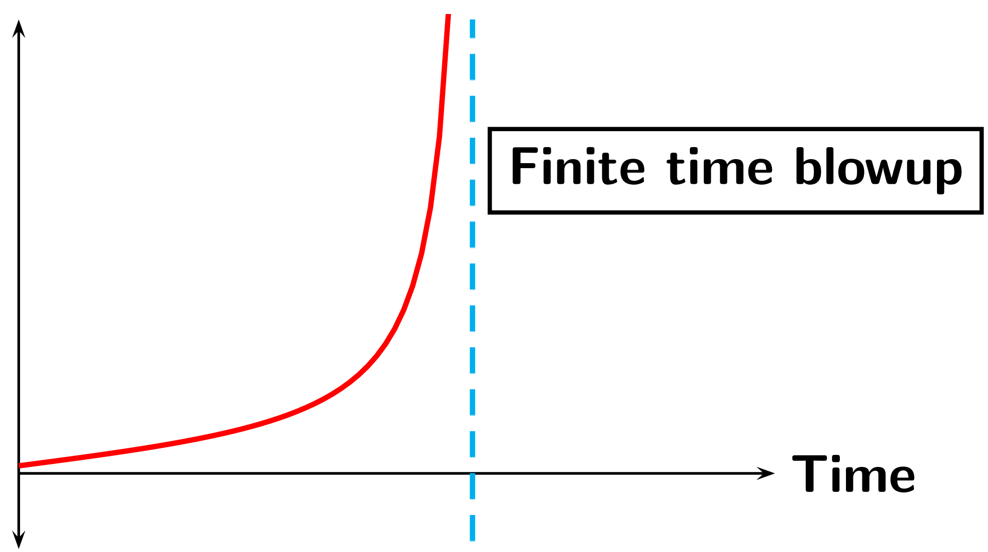


大域的に Lipschitz

微分方程式の解の一意存在性の十分条件

- ✔ (Picard-Lindelöf の定理)　もし、$f(x)$ が局所 Lipschitz なら、$\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ の初期値問題の解 $x(t)$ は、ある T (x_0 に依存) が存在して、$0 \leq t \leq T$ において一意に存在する。
- ✔ (解の延長)　もし、$f(x)$ が大域的 Lipschitz なら、$\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ の初期値問題の解は、負の時間も含めて大域的に一意に存在する。

■ 有限の時間区間のみ解が一意に存在する例: $\dot{x} = x^3$ (局所 Lipschitz)



この場合、有限時間で解が発散している。

微分方程式の解の存在性の十分条件

- ✔ (Peano existence theorem)　一意性がなくてもよいのであれば、Picard-Lindelöf の定理を弱めることができ、$f(x)$ の連続性だけで良い。
- ✔ 微分方程式の右辺に時間 t が入る場合の、Peano existence theorem もある。さらにその一般化も Carathéodory's existence theorem の形でなされている。
- ✔ このあたりの話は有名な Coddington & Levinson (1955) の本に詳しい。
  E.A. Coddington, N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill (1955).

厳密線形化とは

厳密線形化とは

$\boxed{\text{非線形な制御対象} + \text{非線形の制御則} \rightarrow \text{線形系}}$

- ✔ 得られる線形系は、元のシステムとは異なる状態変数の取り方になる。(非線形な座標変換)
- ✔ これは、「近似」ではないので、「厳密な」線形化と呼ばれる。
- ✔ 大きく分けて、入出力間を線形化する「入出力線形化」と、入力–状態間を線形化する「状態線形化」の 2 通りがある。
- ✔ 用いる道具は、リー微分作用素。状態線形化の場合は、さらにリー括弧積とフロベニウスの定理。

メカニカルシステムの場合

メカニカルシステム (ロボットなど):

$$M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) = u$$

この系に対し、次の フィードバック を適用する。(計算トルク法)

$$u = c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) + M(\theta)v$$

すると、$\ddot{\theta} = v$ のように線形化できる。

✔ 非線形項をフィードバックでキャンセルしている。
✔ このようなことを、一般の非線形系でできないだろうか?

入出力厳密線形化

入出力厳密線形化の概要

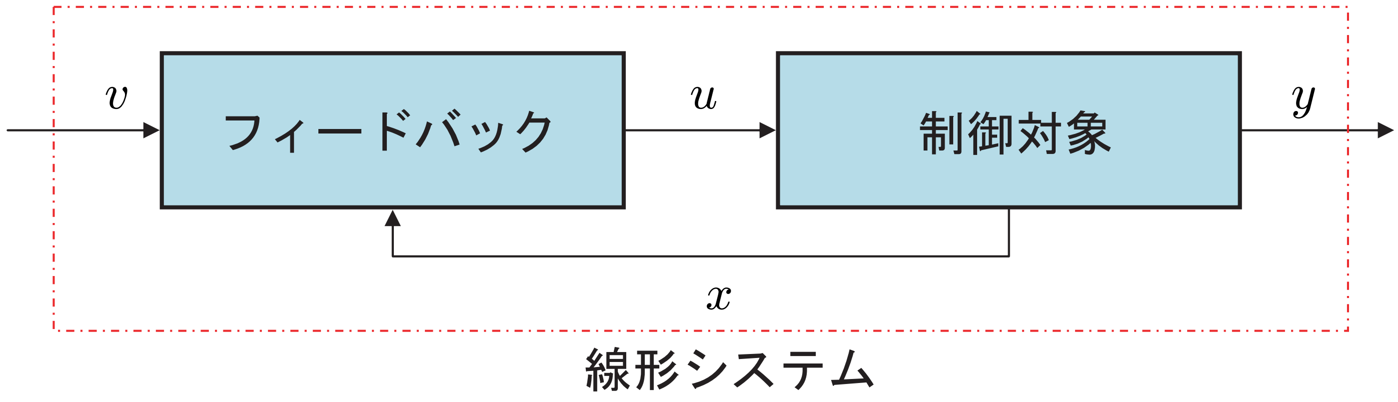
システム:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$
$$y = h(x)$$

に対し、状態フィードバック:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

を用いて、v から y までを厳密に線形化したい。



Lie 微分作用素

入出力線形化における数学的 tool = Lie 微分作用素
今回使うのは関数に作用する場合だけ。

✔ **通常の関数に作用する場合(局所座標表示)**

$h(x)$: $\mathcal{M} \to \Re$ (x の関数)
$f(x)$: $\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$
(x の関数からなる n 次元列ベクトル = ベクトル場)

$$(L_f h)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x)$$

入出力線形化における数学的 tool = Lie 微分作用素
今回使うのは関数に作用する場合だけ。

✔ **通常の関数に作用する場合(局所座標表示)**

$h(x)$: $\mathcal{M} \to \Re$ (x の関数)
$f(x)$: $\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$
(x の関数からなる n 次元列ベクトル = ベクトル場)

$$(L_f h)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x)$$

✔ **作用素の繰り返し**

$$(L_g L_f h)(x) = (L_g(L_f h))(x)$$
$$(L_f^k h)(x) = (\underbrace{L_f(L_f(\cdots(L_f h)\cdots))}_{k-times})(x)$$

Lie 微分の意味

入力なしシステム:

$$\dot{x} = f(x)$$

の解の軌道にそって、$x(t)$ が動くとする。

そのとき、ある x の関数 $y = h(x)$ の値の時間微分を求める。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$$

Lie 微分の意味

入力なしシステム:

$$\dot{x} = f(x)$$

の解の軌道にそって、$x(t)$ が動くとする。

そのとき、ある x の関数 $y = h(x)$ の値の時間微分を求める。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}f(x) = (L_f h)(x)$$

$\boxed{L_f h \text{ は } x \text{ の関数 } h(x) \text{ を } \dot{x} = f(x) \text{ の軌道に沿って時間微分した値}}$

出力を時間 t で微分

しばらくは、1 入力 ($m=1$)1 出力 ($\ell=1$) 系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

出力を時間 t で微分する

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \\ &= (L_{f+gu}h)(x,u) = L_f h(x) + L_g h(x)u \end{aligned}$$

L_{f+gu} を x の関数 $h(x)$ に作用させるということは、$h(x)$ の時間微分を求めていることと等しい。

線形系で言えば、

$$\dot{y} = C(Ax+Bu) = CAx + CBu$$

2 回目は微分可能?

では、一般に、

$$\frac{d^k y}{dt^k} = L_{f+gu}^k h$$

であろうか? 答えは NO である。

たとえば、2 回微分するときに、1 回目で、

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\{(L_{f+gu}h)(x(t), u(t))\}$$

のように x だけの関数ではなく、x と u の関数になる からである。

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(L_{f+gu}h)(x, u) = L_{f+gu}L_f h + L_{f+gu}L_g h \cdot u + \dot{u} \cdot L_g h$$

$\rightarrow L_g h$ **が非ゼロで、u が微分不可能なら、y は 2 回微分不可能。**

$\boxed{y \text{ を 2 回微分するには、一般には } L_g h = 0 \text{ でなくてはならない。}}$

$L_g h \neq 0$ ならば

✔ **出力を微分した式:**

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) \cdot u$$

において、u の係数 $(L_g h)(x)$ が非ゼロならば、

$$u = \frac{-L_f h(x) + v}{L_g h(x)}$$

$L_g h \neq 0$ ならば

- ✔ **出力を微分した式:**

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) \cdot u$$

において、u の係数 $(L_g h)(x)$ が非ゼロならば、

$$u = \frac{-L_f h(x) + v}{L_g h(x)} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = v$$

$\boxed{\text{新しい入力 } v \text{ から } y \text{ までが線形化される} = \text{非線形項をキャンセル}}$

- ✔ **極配置をさらに線形フィードバックでおこなうことが前提。**
- ✔ **実際の系では、$L_g h$ が非ゼロとは限らない。**
  たとえば、位置を微分しても速度という "状態" が出るだけで、入力は現れない。

y を 2 回微分

$L_g h = 0$ のときは、y を時間で 2 回微分する。

$$\boxed{\textbf{仮定:}\ L_g h = 0}$$

$$\ddot{y} = L_{f+gu} L_f h = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) \cdot u$$

$$\Downarrow$$

$L_g L_f h(x) \neq 0$ ならば、

$$u = \frac{-L_f^2 h(x) + v}{L_g L_f h(x)} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = v$$

のように線形化できる。

3 回目以降...

✔ **仮定:** $L_g h = 0$, $L_g L_f h = 0$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = L_{f+gu} L_f^2 h = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) \cdot u$$

$$\Downarrow$$

$L_g L_f^2 h(x) \neq 0$ **ならば、**

$$u = \frac{-L_f^3 h(x) + v}{L_g L_f^2 h(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3 y}{dt^3} = v$$

のように線形化できる。

✔ **以下、同様に繰り返し。**

相対次数

- ✔ **定義:** ある点 x_0 にて、出力 y が相対次数 ρ を持つとは、x_0 の近傍 U_{x_0} が存在して、

$$(L_g L_f^i h)(x) = 0, \quad i = 0, \ldots, \rho - 2, {}^\forall x \in U_{x_0}$$
$$(L_g L_f^{\rho-1} h)(x_0) \neq 0$$

  となることである。
- ✔ 相対次数 ρ を持てば、出力を ρ 回時間微分できる。

$$\dot{y} = L_f h(x)$$
$$\ddot{y} = L_f^2 h(x)$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{\rho-1} y}{dt^{\rho-1}} = L_f^{\rho-1} h(x)$$
$$\frac{d^\rho y}{dt^\rho} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h \cdot u$$

ρ 回微分すると u が陽に現れる

線形系の相対次数

- ✔ **線形系**

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

は非線形系の特別な場合 $\rightarrow$

$$f(x) = Ax, \quad g(x) = b, \quad h(x) = cx$$

- ✔ **線形系の相対次数** $=$ **以下を満たす** ρ

$$cb = cAb = cA^2b = \cdots = cA^{\rho-2}b = 0, \quad cA^{\rho-1}b \neq 0$$

$\rightarrow$ **伝達関数の分子と分母の次数の差 (従来の定義と一致)**

入出力線形化 (SISO 系)

✔ **相対次数 ρ を持つならば、出力を ρ 回微分可能:**

$$\frac{d^\rho y}{dt^\rho} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) \cdot u$$

✔ **フィードバック:**

$$u = \frac{-L_f^\rho h(x) + v}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}$$

で、入出力間が線形化される。

$$\frac{d^\rho y}{dt^\rho} = v$$

✔ $y = h(x)$, $\dot{y} = L_f h(x)$,. . . ,$d^{\rho-1} y/dt^\rho = L_f^{\rho-1} h(x)$ **の線形フィードバック (x から見れば非線形) で、極配置する。**
積分器を付加したり、フィードフォワード項を加えるのも自由。

ベクトル相対次数

MIMO 系 ($\ell \leq m$) について考える。

✔ **定義:** ある点 x_0 にて、系が**ベクトル相対次数** $(\rho_1, \dots, \rho_\ell)$ を持つとは、x_0 の近傍 U_{x_0} が存在して、以下を満たすこと。

$$(L_{g_k} L_f^i h_j)(x) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell, i = 0, \dots, \rho_j - 2,$$
$$k = 1, \dots, m, {}^\forall x \in U_{x_0}$$

$$\text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x_0) \\ & \vdots & \\ L_{g_1} L_f^{\rho_\ell - 1} h_\ell(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_\ell - 1} h_\ell(x_0) \end{bmatrix}}_{=G(x)} = \ell$$

✔ このとき、

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{\rho_1} y_1}{dt^{\rho_1}} \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho_\ell} y_\ell}{dt^{\rho_\ell}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_\ell} h_\ell(x) \end{pmatrix} + G(x)u$$

MIMO 系の入出力線形化

ベクトル相対次数があると仮定

✔ たとえば、擬似逆行列を用いて、

$$u = G^T(x)(G(x)G^T(x))^{-1}\left\{-\begin{pmatrix} L_f^{\rho_1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_\ell}h_\ell(x) \end{pmatrix} + v\right\}$$

とすれば、

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{\rho_1}y_1}{dt^{\rho_1}} \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho_\ell}y_\ell}{dt^{\rho_\ell}} \end{pmatrix} = v$$

のように入出力線形化できる。

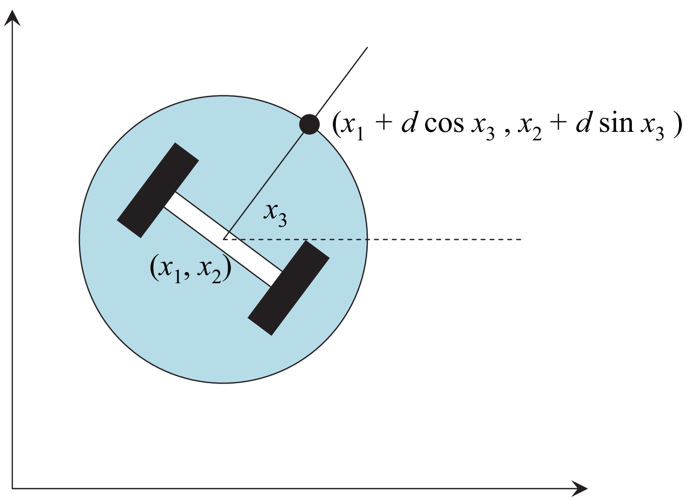
✔ 入出力の数が同じ場合は、単なる逆行列を用いればよい。

ベクトル相対次数が存在しない場合

- ✔ 出力の線形変換によってベクトル相対次数が存在する場合。
- ✔ 線形の規範モデルのダイナミクスをコントローラに含ませることで、入出力線形化が可能な場合。
- ✔ 動的なコントローラで、入出力線形化が可能な場合。
- ✔ 入力の一部を使って、一部の状態を不可制御にすることにより、線形化ができる場合。
- ✔ 現在のところ、線形化できないもの。

二輪車両:

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3$$
$$\dot{x}_2 = u_1 \sin x_3$$
$$\dot{x}_3 = u_2$$



(x_1, x_2) ⋯ 車軸中心座標
x_3 ⋯ 車両の向き
u_1 ⋯ 車両の速度 (入力 1)
u_2 ⋯ ヨーレート (入力 2)

車両の先頭の座標を出力に取る ($G(x)$ の正則性のため)

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + d\cos x_3 \\ x_2 + d\sin x_3 \end{pmatrix}$$

二輪車両 (2)

ベクトル相対次数 $r = (1, 1)$
出力の微分:

$$\dot{y} = G(x)u = \begin{bmatrix} \cos x_3 & -d\sin x_3 \\ \sin x_3 & d\cos x_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$d \neq 0$ **ならば** $G(x)$ **は正則。**

制御則:

$$u = \begin{bmatrix} \cos x_3 & \sin x_3 \\ -\sin x_3/d & \cos x_3/d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_x + k\{r_x - (x_1 + d\cos x_3)\} \\ \dot{r}_y + k\{r_y - (x_2 + d\sin x_3)\} \end{pmatrix}$$

(r_x, r_y) ··· **車両の先頭の目標軌道**

「入出力厳密線形化」のまとめ

- ✔ 相対次数とは、出力を時間で微分する操作の繰り返しにおいて、入力が陽に現れるまでの微分回数である。
- ✔ 出力を相対次数回微分した式において、状態フィードバックによって、非線形項をキャンセルすれば、入出力厳密線形化ができる。
- ✔ 線形フィードバックをさらに作用させて極配置するのが前提。
- ✔ 得られるシステムの次数は相対次数と等しい。
  残りのダイナミクスについては次節。
- ✔ ベクトル相対次数があれば、多入出力系でも入出力厳密線形化できる。

ゼロダイナミクス

Normal Form

- **元のシステムは n 次元、入出力間のダイナミクスは ρ 次元**
  残りの $n-\rho$ 次元はどこにいったのだろう?
- **座標変換 $\Phi(x)$: $x \to (z^T, \xi^T)^T$**

$$z_1 = h(x), z_2 = L_f h(x), \ldots, z_\rho = L_f^{\rho-1} h(x)$$

座標変換のヤコビ行列が正則となるように、ξ の座標を決める。

- **Normal Form:**

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h(\Phi^{-1}(z,\xi)) + L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(z,\xi)) \cdot u \\ \dot{\xi} &= \gamma(z,\xi) + \zeta(z,\xi) u \end{aligned}$$

SISO 系の場合、座標変換をうまくとれば、$\zeta(z,\xi) = 0$ とできる。

$\zeta(\cdot) = 0$ となる座標の取り方

$\zeta(\cdot) = L_g \xi = 0$ となるように ξ を取ればよい。

偏微分方程式:

$$L_g \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} g = 0$$

の独立な解は $n-1$ 個。(フロベニウスの定理 = 次の節で述べる)

そのうち、$z_1, \ldots, z_{\rho-1}$ も解の一部。
$z_1, \ldots, z_{\rho-1}$ に独立な、残りの $n-\rho$ 個の解を並べて
ξ の各要素とすればよい。

ゼロダイナミクス

ここで、出力が $y \equiv 0$ に追従しているものと仮定する。
y を t で微分しても 0 なので、$z = 0$。$z = 0$ なる超曲面上での入力は、

$$u = -\frac{L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(0,\xi))}{L_f^{\rho} h(\Phi^{-1}(0,\xi))}$$

✔ これらを、代入すると、$n-\rho$ 次の**ゼロダイナミクス**が得られる。

$$\dot{\xi} = \gamma(0,\xi) - \zeta(0,\xi)\frac{L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(0,\xi))}{L_f^{\rho} h(\Phi^{-1}(0,\xi))}$$

$\zeta(z,\xi) = 0$ のように座標を取れば、この部分は消える

✔ y が 0 でない場合も、

✘ y の目標値を時間の関数で与える。あるいは、
✘ y の目標値を生成する外部システム (exo system) を与える。

ことにより、「ゼロエラーダイナミクス」を定義できる。

線形系のゼロダイナミクス

線形系の例:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 1}$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

入出力線形化制御則を構成すると、 $u = -x_1 - x_2 + v$
閉ループ系:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} v \qquad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\cancel{s-1}}{s\cancel{(s-1)}}$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

つまり、入出力線形化法とは

- ✔ **極配置してゼロ点を消去** $\Rightarrow$ **不可観測モード**
- ✔ **残りの極を原点に (さらにフィードバックして適当な極へ)**

非線形非最小位相系

線形系にとってゼロ点を動かせないのと同様に、ゼロダイナミクスは不変なダイナミクス

- ✔ <u>定義:</u> ゼロダイナミクスが、不安定な系を、(ゼロ出力に対する) **非最小位相系**という。
- ✔ **非最小位相系では、入出力線形化制御は適用できない。**
  $\to$ 不可観測で不安定な内部ダイナミクスが生ずる。

カスケード結合の安定性

✔ **Vidyasagar の補題:** システム

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) \\
\dot{z} &= g(z) + \gamma(x, z)x
\end{aligned}
$$

において、$\dot{x} = f(x)$ および $\dot{z} = g(z)$ は局所漸近安定で、$\gamma(x, z)$ は微分可能とする。そのとき、システム全体も局所漸近安定である。

カスケード結合の安定性

✔ **Vidyasagar の補題:** システム

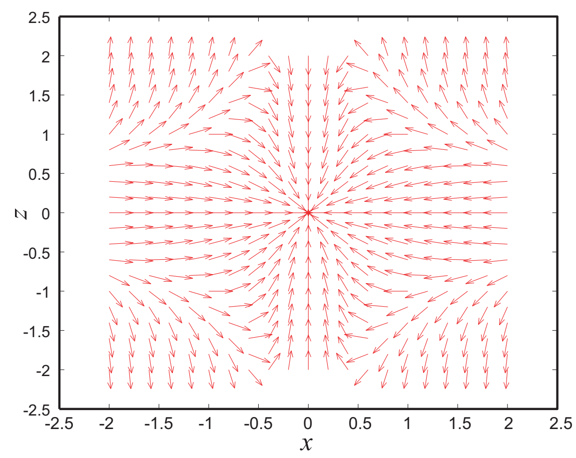
$$\dot{x} = f(x)$$
$$\dot{z} = g(z) + \gamma(x, z)x$$

において、$\dot{x} = f(x)$ および $\dot{z} = g(z)$ は局所漸近安定で、$\gamma(x, z)$ は微分可能とする。そのとき、システム全体も局所漸近安定である。

✔ しかし、$\dot{x} = f(x)$, $\dot{z} = g(z)$ が大域的漸近安定であってもシステム全体が大域的漸近安定であるとは限らない。

[例]

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{z} = -z + z^3 x^2$$



大域的安定性

前記の現象があるため、
[ゼロダイナミクスが大域的に漸近安定]
+ [入出力線形化し、極配置で出力を大域的に 0 にする]
の組み合わせは、必ずしも**大域的に漸近安定を意味しない**。

[例]

制御対象:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 x_2^3 + u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

ゼロダイナミクス: $\dot{x}_2 = -x_2$
(大域的に漸近安定)

制御則: $u = -x_1 - x_2$

出力のダイナミクス:

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

(大域的に漸近安定)

しかし、閉ループ系は、

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 x_2^3
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 先の例と同じ

ピーキング現象

では、z の誤差ダイナミクスを速くすればいいのではないか?

答えは否定的である。
相対次数 2 以上の場合、z の誤差ダイナミクスを速くすると、かえって安定化領域を狭めることがある。

ピーキング現象: 相対次数 2 以上の場合、誤差ダイナミクスの極の実部を (負の側に) 大きくとると、その過渡現象が大きく暴れることがある 。

「ゼロダイナミクス」のまとめ

- ✔ 相対次数がシステムの次数より低いときは、入出力線形化を行うと、不可観測なダイナミクス「ゼロダイナミクス」が現れる。
- ✔ 線形系のゼロ点が動かせないのと同じ意味で、「ゼロダイナミクス」は不変なダイナミクス。
- ✔ ゼロダイナミクスが不安定な非線形非最小位相系では入出力線形化を適用できない。(内部安定性が保たれない)
- ✔ ゼロダイナミクスが大域的に漸近安定でも、全系の大域的漸近安定性が得られないことがある。さらに極の設定によって安定化領域を拡大することも一般的にはできない (ピーキング現象)。

状態厳密線形化

状態厳密線形化の基本的な考え方

「非最小位相系では、入出力線形化制御は適用できない。」
$\Rightarrow$ **出力の取り方を変えれば、最小位相性は変化する。**

- ✔ 相対次数が n となる出力 $\lambda(x)$ を見つける。
- ✔ $n-\rho=0$ なので、そのような出力 $\lambda(x)$ に対しては、ゼロダイナミクスは存在しない。
- ✔ $\lambda(x)$ を出力として入出力線形化を行うと、全ての状態が線形化される。
  $\rightarrow$ **状態厳密線形化**
- ✔ 逆は真だろうか?

状態厳密線形化と $\lambda(x)$ の存在性

- ✔ **仮定:** 状態フィードバック: $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ ($\beta(x) \neq 0$)、および、座標変換 $z = \Phi(x)$ によって、線形の可制御正準形

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

に変換されていると仮定

- ✔ z_1 を出力とすると、閉ループ系の相対次数は n。フィードバックによって相対次数は変わらないので、$\Phi_1(x)(= z_1)$ を出力とした制御対象の相対次数は n。

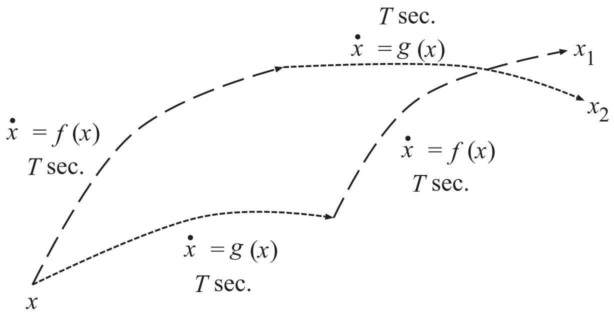
定理: 1 入力 1 出力非線形系に対し、状態フィードバックで可制御な線形系に変換できるための必要十分条件は、相対次数が n (= 系の次数) となるような出力関数 $\lambda(x)$ が存在することである。

Lie 括弧積 (Lie bracket)

✔ Lie bracket の定義:
$f(x)$, $g(x)$: $M \to TM$ (ベクトル場)

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

✔ 2 つのベクトル場 f と g の可換性を計る尺度。



$$[f, g](x) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T^2} (x_1(x, T) - x_2(x, T))$$

Lie 括弧積 (2)

✔ いろいろな公式 (a_1, a_2 はスカラー定数)

$$[f,g] = -[g,f]$$

$$[a_1 f_1 + a_2 f_2, g] = a_1[f_1, g] + a_2[f_2, g]$$

$$[f, a_1 g_1 + a_2 g_2] = a_1[f, g_1] + a_2[f, g_2]$$

$$[f,[g,p]] + [g,[p,f]] + [p,[f,g]] = 0$$

(Jacobi の恒等式)

$$[\alpha f, \beta g] = \alpha\beta[f,g] + \alpha \cdot (L_f\beta)\cdot g - (L_g\alpha)\cdot\beta\cdot f$$

$$L_{[f,g]}h = L_f L_g h - L_g L_f h$$ (重要)

出力関数の満たすべき条件

相対次数が n となるための条件:

条件 1 $(n-1)$ 回微分しても入力が陽に表れない

$$(L_g\lambda)(x) = 0$$
$$(L_gL_f\lambda)(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$(L_gL_f^{n-2}\lambda)(x) = 0$$

出力関数の満たすべき条件

相対次数が n となるための条件:

条件 1 $(n-1)$ **回微分しても入力が陽に表れない**

$$(L_g\lambda)(x) = 0$$
$$(L_gL_f\lambda)(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$(L_gL_f^{n-2}\lambda)(x) = 0$$

条件 2 n **回微分すると入力が陽に表れる**

$$(L_gL_f^{n-1}\lambda)(x) \neq 0$$

この条件を Lie bracket によって書き下す。
Lie 微分との関係:

$$L_{[f,g]}\lambda = L_fL_g\lambda - L_gL_f\lambda$$

条件 1 の変形

一階の偏微分の条件に変換する

$$L_g\lambda = 0$$

$$L_gL_f\lambda = -L_{[f,g]}\lambda + L_f \underbrace{L_g\lambda}_{=0} = 0$$

$$\begin{aligned} L_gL_f^2\lambda &= -L_{[f,g]}L_f\lambda + L_f \underbrace{L_gL_f\lambda}_{=0} \\ &= L_{[f,[f,g]]}\lambda - L_f \underbrace{L_{[f,g]}\lambda}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$L_gL_f^{n-2}\lambda = (-1)^n L_{[f,[f\cdots[f,g]\cdots]]}\lambda = 0$$

$\mathbf{ad}_f$ オペレータ

定義:

$$\mathbf{ad}_f g = [f, g]$$

複数回作用する時は、

$$\mathbf{ad}_f^k g = \underbrace{[f, [f \cdots [f, g]}_{k-times} \cdots]]$$

0 回作用する場合 $= g$ のまま

$$\mathbf{ad}_f^0 g = g$$

条件 1 の別表現

Lie Bracket を使った条件 1 の表現:

$$
\begin{aligned}
(L_g\lambda)(x) &= 0 \\
(L_{\mathbf{ad}_f g}\lambda)(x) &= 0 \\
&\vdots \\
(L_{\mathbf{ad}_f^{n-2} g}\lambda)(x) &= 0
\end{aligned}
$$

条件 2 の変形

条件 1 を用いると、

$$(L_g L_f^{n-1}\lambda)(x) = -(L_{[f,g]} L_f^{n-2}\lambda)(x) + (L_f \underbrace{L_g L_f^{n-2}\lambda)}_{=0}(x)$$

$$= L_{\mathbf{ad}_f^2 g} L_f^{n-3}\lambda - L_f L_{[f,g]} L_f^{n-3}\lambda$$

$$= -L_{\mathbf{ad}_f^3 g} L_f^{n-4}\lambda + L_f L_{\mathbf{ad}_f^2 g} L_f^{n-4}\lambda - L_f L_g L_f^{n-2}\lambda + L_f^2 L_g L_f^{n-3}\lambda$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1} L_{\mathbf{ad}_f^{n-1} g}\lambda \neq 0$$

λ の条件

以上まとめると、

条件:

$$
\begin{aligned}
(L_g\lambda)(x) &= 0 \\
(L_{\mathbf{ad}_f g}\lambda)(x) &= 0 \\
(L_{\mathbf{ad}_f^2 g}\lambda)(x) &= 0 \\
&\vdots \\
(L_{\mathbf{ad}_f^{n-2} g}\lambda)(x) &= 0 \\
(L_{\mathbf{ad}_f^{n-1} g}\lambda)(x) &\neq 0
\end{aligned}
$$

を満たす関数 $\lambda(x)$ を見つけよ。

ベクトル場の独立性

ベクトル場:

$$g, \mathbf{ad}_f g, \ldots, \mathbf{ad}_f^{n-1} g$$

背理法 $\mathbf{ad}_f^k g$ **が、** g, $\mathbf{ad}_f g$,...,$\mathbf{ad}_f^{k-1} g$ **に対して、一次従属と仮定。**

$$\mathbf{ad}_f^k g(x) = c_0(x)g(x) + c_1(x)\mathbf{ad}_f g(x) + \cdots + c_{k-2}(x)\mathbf{ad}_f^{k-1} g(x)$$

なる係数が存在する。そのとき、

$$\begin{aligned}\mathbf{ad}_f^{k+1} g(x) &= c_0(x)\mathbf{ad}_f g(x) + (L_f c_0)(x)g(x) + \\ &\quad \cdots + c_{k-3}(x)\mathbf{ad}_f^{k-1} g(x) + (L_f c_{k-3})(x)\mathbf{ad}_f^{k-2} g(x) \\ &\quad + c_{k-2}(x)\{c_0(x)g(x) + c_1(x)\mathbf{ad}_f g(x) + \cdots + c_{k-2}(x)\mathbf{ad}_f^{k-1} g(x)\} \\ &\quad + (L_f c_{k-2})(x)\mathbf{ad}_f^{k-1} g(x)\end{aligned}$$

となり、 $\mathbf{ad}_f^{k+1} g(x)$ **も、一次従属。**

ベクトル場の必要条件 (A)

よって、$\lambda(x)$ の満たすべき条件より、

ベクトル場の必要条件 (A):

n 個のベクトル場、

$$g, \mathbf{ad}_f g, \ldots, \mathbf{ad}_f^{n-1} g$$

は一次独立。(=局所強可到達性の十分条件)

積分可能性 (1)

条件 1 は、$(n-1)$ 本の連立偏微分方程式

$$
\begin{aligned}
(L_g\lambda)(x) &= 0\\
(L_{\mathbf{ad}_f g}\lambda)(x) &= 0\\
(L_{\mathbf{ad}_f^2 g}\lambda)(x) &= 0\\
&\vdots\\
(L_{\mathbf{ad}_f^{n-2} g}\lambda)(x) &= 0
\end{aligned}
$$

を解くことに等しい。定数解 (条件 2 を満たさない) を除く。

$$
\left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial x}, p(x)\right\rangle = \left[\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\right] p(x) = 0, \quad p = g, \mathbf{ad}_f g, \ldots, \mathbf{ad}_f^{n-2} g
$$

$\Rightarrow$ $\partial\lambda/\partial x$ **が** g**,** $\mathbf{ad}_f g$**,...,**$\mathbf{ad}_f^{n-2} g$ **に直交**

積分可能性 (2)

n 次元空間で $(n-1)$ 個のベクトル g, ad$_f g$,...,ad$_f^{n-2} g$ に直交する 0 でないベクトルは必ず存在する。

$$\Downarrow$$

その直交する横ベクトル $\omega(x)$ から、必ず $s(x)(\partial\lambda/\partial x) = \omega(x)$ なる関数 $\lambda(x)$ および $s(x)$ $(\neq 0)$ は作れるのか?
ただし、$s(x)$ はスケーリング関数。

答えは、**否定的**である。すなわち、さらに条件が必要となる。
$\rightarrow$ フロベニウスの定理

フロベニウスの定理

- ✔ $x \in \Re^n$ 上の q 本の連立偏微分方程式、$L_{p_1}\lambda = 0$,. . . ,$L_{p_q}\lambda = 0$ を考える。(ベクトル場、$p_1(x), \ldots, p_q(x)$ は線形独立)
- ✔ フロベニウスの定理: この連立偏微分方程式が、局所的に、$n - q$ 個の独立な解 $\lambda_1(x)$,. . . ,$\lambda_{n-q}(x)$ を持つための必要十分条件は、ベクトル場が張る空間 (=ディストリビューション)、

$$\Delta(x) = \textsf{span}\{p_1(x), \ldots, p_q(x)\}$$

がインボリューティブであることである。
- ✔ ベクトル場の張る空間 $\Delta(x)$ がインボリューティブであるとは、

$$[\delta_1, \delta_2] \in \Delta, \quad {}^\forall\delta_1 \in \Delta, {}^\forall\delta_2 \in \Delta$$

となることである。

ベクトル場の必要条件 (B)

条件を満たす $\lambda(x)$ が存在する必要条件は、

ベクトル場の必要条件 (B):
ディストリビューション、

$$\text{span}\{g(x), \text{ad}_f g, \ldots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$$

がインボリューティブであることである。

状態厳密線形化可能のための必要十分条件

定理　状態厳密線形化可能であるための必要十分条件は、

✔　ディストリビューション、

$$\Delta_n = \mathrm{span}\{g, \mathrm{ad}_f g, \ldots, \mathrm{ad}_f{}^{n-1} g\}$$

の次元が n であること。

✔　ディストリビューション、

$$\Delta_{n-1} = \mathrm{span}\{g, \mathrm{ad}_f g, \ldots, \mathrm{ad}_f{}^{n-2} g\}$$

がインボリューティブであること。

の 2 条件がなりたつことである。

✔　必要性は、これまでの議論で明らか。
✔　十分性は、制御則を構成することで示される。

制御則の構成法 (1)

連立偏微分方程式 $L_\delta\lambda(x) = 0$ ($\delta \in \Delta_{n-1}$) の独立な解 $\lambda(x)$ は 1 個存在。

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} \cdot [g, \mathbf{ad}_f g, \ldots, \mathbf{ad}_f^{n-1} g] = [0, \ldots, 0, L_{\mathbf{ad}_f^{n-1} g}\lambda]$$

$\neq 0$ **条件より正則** $\Rightarrow$ **よって、これは非ゼロ**

よって、

$$L_g\lambda = L_gL_f\lambda = \cdots = L_gL_f^{n-2}\lambda = 0$$
$$L_gL_f^{n-1}\lambda \neq 0$$

となり、$\lambda(x)$ を出力とすると相対次数は n。

制御則の構成法 (2)

✔ **座標変換:** $z = \Phi(x)$

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda(x) \\ z_2 &= (L_f \lambda)(x) \\ &\vdots \\ z_n &= (L_f^{n-1} \lambda)(x) \end{aligned}$$

✔ **座標変換後の系:**

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^n \lambda + L_g L_f^{n-1} \lambda \cdot u \end{pmatrix}$$

✔ **状態厳密線形化制御則:**

$$u = -\frac{L_f^n \lambda(x)}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)} + \frac{v}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)}$$

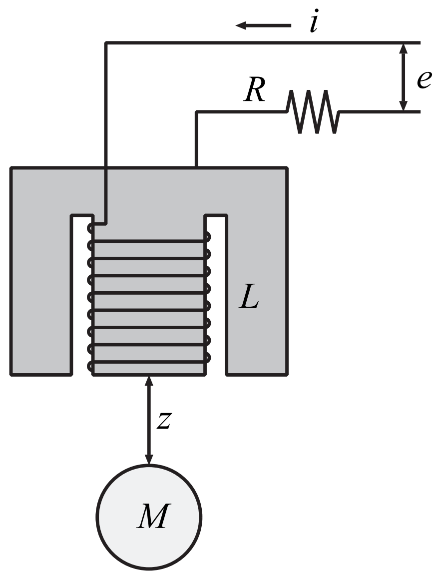
例題 — 磁気浮上系 (1)

磁気浮上システム:

$$M\ddot{z} = MG - K\cdot\left(\frac{i}{z+z_0}\right)^2$$

$$e = Ri + \frac{d}{dt}\{L(z)i\}$$

$$L(z) = \frac{2K}{z+z_0} + L_0$$



Magnetic levitation system

z —球と電磁石との距離 (ギャップ)
i — コイルに流れる電流
e — 入力電圧
M — 球の質量
G — 重力加速度

z_0 — ギャップの補正定数
R — 電磁石の抵抗 (定数)
$L(z)$ — inductance (z の関数)
L_0 — 漏れ磁束による inductance(定数)
K $(= \mu_0 N^2 S/4)$ — 吸引力係数 (定数)

磁気浮上系 (2)

$e = e_s$ **(定数) としたときの平衡点:**

$$\begin{pmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ i_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{K} e_s / (R\sqrt{MG}) - z_0 \\ 0 \\ e_s/R \end{pmatrix}$$

状態量: $x = (z - z_s, \dot{z}, i - i_s)^T$
入力: $u = e - e_s$
状態方程式:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ G - \dfrac{K(x_3 + i_s)^2}{M(x_1 + z_s + z_0)^2} \\ \phi(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L(x_1 + z_s) \end{pmatrix} u$$

$$\phi(x) = -\frac{1}{LL(x_1 + z_s)} \left(R x_3 + \frac{2K x_2 (x_3 + i_s)}{(x_1 + z_0 + z_s)^2} \right)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L(x_1 + z_s) \end{pmatrix}$$

$$\textbf{ad}_f g = [f, g] = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2K(x_3 + i_s)}{M(x_1 + z_0 + z_s)^2 L(x_1 + z_s)} \\ \dfrac{R}{L(x_1 + z_s)^2} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{ad}_f^2 g = [f, [f, g]] = \begin{pmatrix} -\dfrac{2K(x_3 + i_s)}{M(x_1 + z_0 + z_s)^2 L(x_1 + z_s)} \\ * \\ * \end{pmatrix}$$ (詳細は省略。第一成分は非ゼロ)

条件 (A) は満たされている

$$\textbf{rank}\Delta_3 = \textbf{rank}\{f, [f, g], [f, [f, g]]\} = 3$$

磁気浮上系 (4)

条件 (B) も満たされている

$$\Delta_2 = \textsf{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

であり、第一成分は必ず 0。

$$[g,[f,g]] = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2K}{M(x1+z_0+z_s)^2L(x1+x_s)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta_2$$

$\Rightarrow$ Δ_2 は involutive。

$\lambda = x_1$ を出力と取って入出力線形化をすればよいことがわかる。

「状態厳密線形化」のまとめ

- ✔ 状態フィードバックと座標変換で、非線形システムを厳密に線形化する。
- ✔ 相対次数が n となる出力があるか否かが、可制御な線形システムに変換できるための条件。
- ✔ 必要十分条件にインボリューティブ条件が含まれるので、一般には厳しい条件となっている。
- ✔ ほとんどの 2 次のシステムは状態厳密線形化可能。
- ✔ 3 次以上の系でも、システムが状態厳密線形化可能な性質を元来持っていることはある。

Lyapunov 安定論

平衡点

自律的システム:

$$\dot{x} = f(x)$$

において、$f(x_0) = 0$ となる点 x_0 を平衡点 (equilibrium (point), 特異点) という。

- ✔ 通常は、状態 x を平行移動するように再定義し、原点 $x = 0$ を平衡点として論ずる場合が多い。$\Rightarrow$ 一般性は失われない。
- ✔ 平衡点では $\dot{x} = 0$、すなわち解は停留する。
- ✔ 以降では、この平衡点の安定性に関して述べる。

安定性の厳密な定義 (1)

有界性: Boundedness

系 $\dot{x} = f(x)$ において、平衡点近傍 U の初期値 $x(0)$ から出発した解が**有界**であるとは、初期値によって定まる状態のノルム上界 $K(x(0))$ が存在し、$\|x(t)\| \leq K(x(0))$ $(t \geq 0)$ となることである。

(局所) 安定性: (Local) Stability $\rightarrow$ LS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が **(局所) 安定**であるとは、全ての $\epsilon > 0$ に対して $\delta(\epsilon) > 0$ が存在し、以下が成り立つこと。

$$\|x(0)\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t; x(0))\| < \epsilon, t \geq 0$$

- ✔ (安定な系) $\subset$ (ある原点近傍を初期値とする解が有界な系)
- ✔ 安定な系では、原点近傍から出発した解は原点近傍に留まる。(リミットサイクルのような場合、軌道は有界だが、原点は不安定。)
- ✔ (局所) 安定性のことを Lyapunov 安定性ということがある。
- ✔ (局所) 安定性の主語は 'システム' ではなく '平衡点' である。

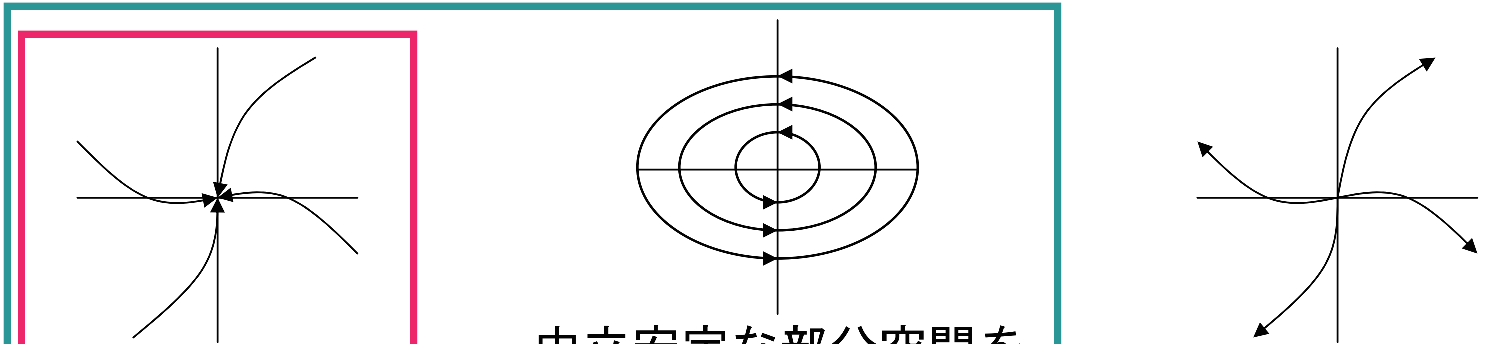
安定性の厳密な定義 (2)

吸引性: Attractiveness

原点近傍 U が存在し、その近傍を初期値 $x(0)$ とする解が、$\|x(t;x(0))\| \to 0$ $(t \to \infty)$ ならば、原点は**吸引的**であるという。また、そのとき U を吸引領域という。

(局所) 漸近安定性: (Local) Asymptotical Stability $\to$ LAS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が **(局所) 漸近安定**であるとは、$x = 0$ が安定かつ吸引的であることである。



漸近安定な平衡点

中立安定な部分空間を含む安定な平衡点

不安定な平衡点

Lyapunov安定な平衡点

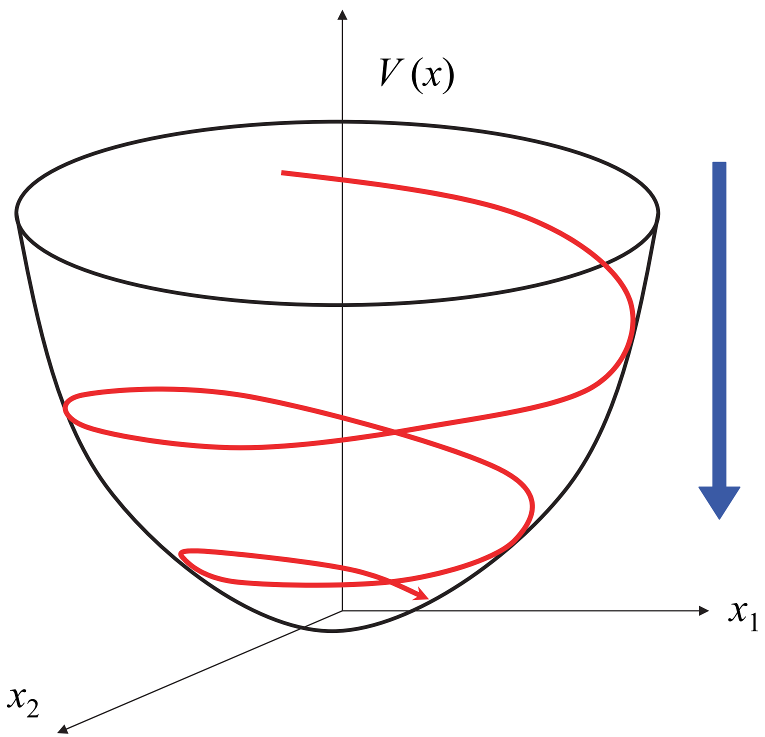
安定性の厳密な定義 (3)

大域的安定性: Global Stability $\rightarrow$ GS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が**大域的に安定**であるとは、安定であり、かつ全ての初期値に対する解が有界であることである。

大域的漸近安定性: Global Asymptotical Stability $\rightarrow$ GAS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が**大域的漸近安定**であるとは、漸近安定で、かつ吸引領域が全領域であることである。



Lyapunov 関数: $V(x)$
$\rightarrow$ **正定関数**

正定関数とは:
- ✔ $V(0) = 0$
- ✔ $V(x) > 0, \quad x \neq 0$

$\Rightarrow$ **お椀型の関数**

たとえば、

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$$

$V(x)$ が単調減少すれば、x は原点に漸近

$\Rightarrow \dot{V}(x) < 0$ **(**$x \neq 0$**) なら漸近安定**

Lyapunov の安定定理

共通した条件: $\boxed{V(x) \text{ は正定関数}}$

LS:
原点近傍で

✔ $\dot{V} \leq 0$

ならば、(局所) 安定。

LAS:
原点近傍で

✔ $\dot{V} < 0 \ (x \neq 0)$

ならば、(局所) 漸近安定。

GS:

✔ $\dot{V} \leq 0$
✔ $V(x)$ **が放射状に非有界**

ならば、大域安定。

GAS:

✔ $\dot{V} < 0 \ (x \neq 0)$
✔ $V(x)$ **が放射状に非有界**

ならば、大域的漸近安定。

放射状に非有界(Radially unbounded) であるとは?

$$V(x) \to \infty \quad (\|x\| \to \infty)$$

$\dot{V}$ の計算法

もともとは、微分方程式

$$\dot{x} = f(x)$$

の安定性を調べたかったはず。→ $f(x)$ の情報はどこで使うのだろう?

$\dot{V}(x)$ の計算に $f(x)$ を使う。

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) (= L_f V(x))$$

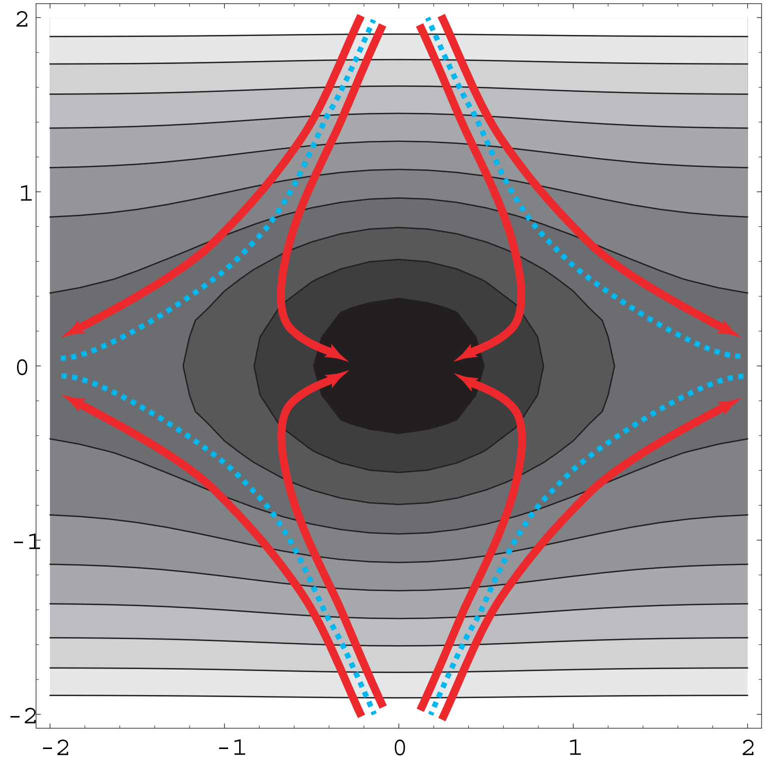
- ✔ **局所座標系では、$\partial V / \partial x$ は横ベクトル。**

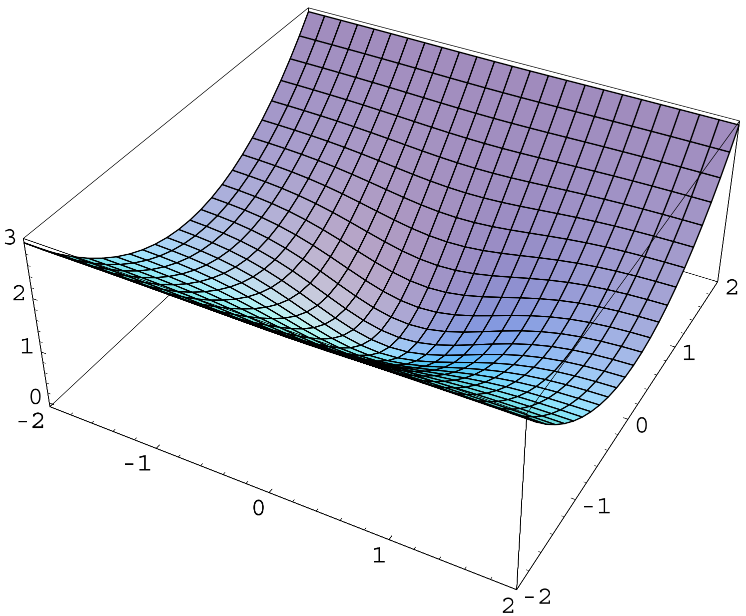
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

- ✔ **$L_f V$ の L_f はリー微分作用素と呼ばれる。L_f が V に作用していると考える。**

放射状に非有界でなかったら

「放射状に非有界」の条件が無い場合:





- ✔ 局所的には漸近安定
- ✔ 大域的には不安定 $\Rightarrow$ 水色の線 ($=$ Separatrix) の外側では発散

放射状に非有界条件とは

$V(x)$ が 「正定関数」 $+$ 「放射状に非有界」ならば、

- ✔ 任意のレベル集合 $S_a = \{x | V(x) \le a\}$ $(a > 0)$ がコンパクト (= 有界閉集合)。
- ✔ 放射状に非有界条件がなければ、小さい a についてのみコンパクト性が保証される。
- ✔ コンパクト性より、任意のレベル面 $\partial S_a = \{x | V(x) = a\}$ 上で $\dot{V}$ が上に有界

$$\dot{V}(x) \le p(a) < 0, \quad {}^{\forall}x \in \partial S_a, \ a > 0$$

これより、

$$\dot{V} \le p(V) < 0$$

となり、V は 0 に収束することが保証される。

弱 Lyapunov 関数

✔ 強 Lyapunov 関数: 正定で、$\dot{V} < 0$ $(x \neq 0)$ $\rightarrow \dot{V}$ が負定

✔ 弱 Lyapunov 関数: 正定で、$\dot{V} \leq 0$ $\rightarrow \dot{V}$ が準負定

弱 Lyapnov 関数の場合、"これだけの条件では"、$\dot{V} = 0$ となる集合に収束することしか言えない。

漸近安定な系では強 Lyapunov 関数は存在はしているはず (Lyapunov の逆定理)。でも人間が探しても、強 Lyapunov 関数が見つからないことがある。

$$\Downarrow$$

弱 Lyapunov 関数だけで漸近安定性が保証できないだろうか?

Yoshizawa・La Salle の不変定理

集合 Ω に初期点 $x(0)$ を持つとき、すべての $t > 0$ に対して $x(t) \in \Omega$ ならば、Ω はその系に対して正の時間方向の不変集合であるという。

Yoshizawa・La Salle の不変定理: Ω は正の時間方向の不変集合とする。Ω から出発した解が $E(\subset \Omega)$ に収束したとする。そのとき、E の中に含まれる最大の正の時間方向の不変集合を M とすると、Ω から出発した解はすべて M に収束する。

普通は、Ω は全空間だと思って、E と M の関係だけ考えればよい。

弱 Lyapunov 関数のときの漸近安定定理: $V(x)$ を放射状に非有界な弱 Lyapunov 関数であるとする。もし、$E = \{x|\dot{V}(x) = 0\}$ に含まれる最大の正の時間方向の不変集合が原点 $x = 0$ のみであれば、$x = 0$ は大域的に漸近安定である。

$\rightarrow M = \{0\}$ の場合を考えている。

不変定理 = 例題

例題:

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$V(x) = x^T P x = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = x_1^2 + x_2^2$$

Lyapunov 関数の時間微分を計算すると、

$$\dot{V}(x) = x^T (PA + A^T P) x = -2x_2^2$$

つまり、これだけでは $E = \{x | x_2 = 0\}$ に収束することしかいえない。

不変定理を適用する。E に居つづけるためには、$\dot{x}_2 = 0$ となることが必要。$x \in E$ かつ $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 = 0$ となる点は原点しかない。したがって、E に含まれる最大の正の時間方向の不変集合は原点のみであり、不変定理より系は大域的漸近安定。

Lyapunov 安定論のまとめ

- ✔ 正定なリアプノフ関数 $V(x)$ の単調減少性を見ることで、安定性が判定できる。
- ✔ $\dot{V}(x)$ が準負定で安定、負定で漸近安定。
- ✔ 放射状に非有界条件を満たせば、大域的。
- ✔ 弱 Lyapunov 関数でも、不変定理の条件を満たせば、漸近安定。

散逸性

散逸性の概念

ストレージ関数: $V(x)$

- ✔ 仮想的なエネルギー関数
- ✔ 一般には準正定。しかし、これでは不便なので、後半では正定な場合だけを考えるようにする。

供給率: $s(u, y)$

- ✔ 外部から供給される単位時間当たりのエネルギー
- ✔ 入力 u と出力 y の関数

システムが散逸的であるとは:

(ストレージ関数の増加率) $\leq$ (供給率)

「(右辺)$-$(左辺)」が、ストレージ関数の散逸項 (≥ 0)。

散逸性の定義

散逸性の定義: ストレージ関数が存在して、以下の**散逸不等式**が成り立つこと。

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \le \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t))dt$$

- ✔ $V(x)$ ...ストレージ関数　　$V(0) = 0,\quad V(x) \ge 0$
- ✔ $s(\cdot)$ ...供給率

V が微分可能であれば、

$$\dot{V} \le s(u, y)$$

と同じ。(微分散逸性)

散逸性の 1 つの条件

仮定: 入力 u によって原点から全ての点に可到達と仮定する。

Required supply:

$$V^r(x(t_1)) \equiv \inf_{u,t_1}\left(\int_{t_0}^{t_1} s(u,y)\,d\tau\right), \quad x(t_0)=0$$

が準正定ならば、系は V_r をストレージ関数としてもち、散逸性を満たす。

実は、available storage

$$V_a(x(t_0)) = \sup_{u,t_1}\left(-\int_{t_0}^{t_1} s(u,y)dt\right)$$

に関しても V_r と同じことが言えて、すべてのストレージ関数 $V(x)$ は $V_a(x) \le V(x) \le V_r(x)$ を満たす。

散逸性の 1 つの条件 (続き)

可到達性条件を満たしているとする。そのとき、系が散逸的であることと、

$$\int_{t_0}^{t_1} s(u,y)dt \geq 0, \quad x(t_0)=0, \ {}^{\forall}u(\cdot)$$

は同値。

必要性の証明: 散逸性の定義式に $x(t_0)=0$ を代入すれば自明。
十分性の証明: 条件が成り立てば、required supply は準正定。よって散逸的。

いろいろな散逸性

- ✔ $s(u,y)=\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2$ に対して散逸的な場合:
  $u\to y$ の L_2-ゲインが γ 以下である必要十分条件。
- ✔ $s(u,y)=u^Ty$ に対して散逸的な場合:
  受動性の定義。
- ✔ $s(u,y)=u^Ty-a\|u\|^2-b\|y\|^2$ に対して散逸的な場合:
  より一般的な円条件。

次の節では、受動性に関して詳しく述べる。

受動性

受動性の定義

受動性 (passivity) とは: 供給率 $u^T y$ について散逸的であること

つまり、準正定なストレージ関数 $V(x)$ が存在して、

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} u^T y \, dt$$

- ✔ 入力の数と出力の数が同じ。
- ✔ $V(x)$ が微分可能ならば、微分受動性

$$\dot{V} \leq u^T y$$

と同じ。

受動的なシステムの例

- ✔ LCR からなる 2 端子回路網。電圧が入力で、電流が出力。供給率は供給電力となり、ストレージ関数は、回路網内のエネルギー。
- ✔ ハミルトニアンが準正定の場合、機械系は受動的である。このときのストレージ関数はハミルトニアンで、出力は一般化速度・入力は外力。供給率は外部からの仕事率になる。
- ✔ 機械系の場合を拡張して考えると、一般化ハミルトニアンシステム:

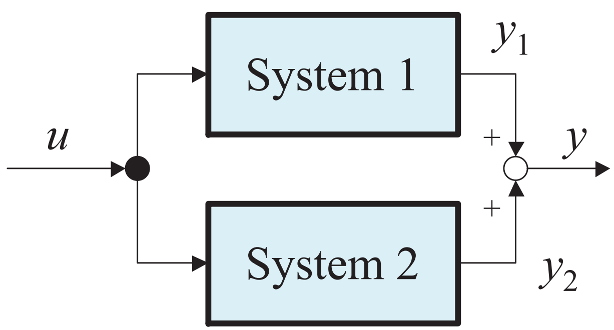
$$\dot{x} = (J - R)\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^T + g(x)u$$
$$y = g(x)^T \left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^T$$

は H が準正定の場合、受動的である。ただし、J は歪対称行列、R は正定行列。

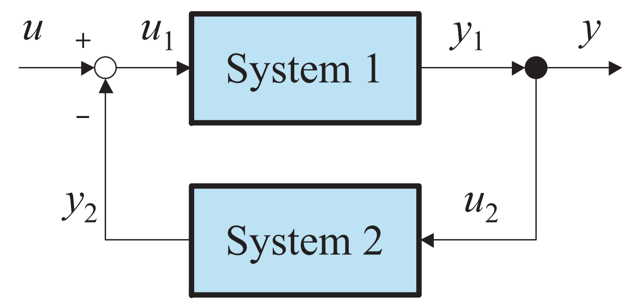
$$\dot{H} = -\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right] R \left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^T + y^T u \le u^T y$$

受動的な系の接続

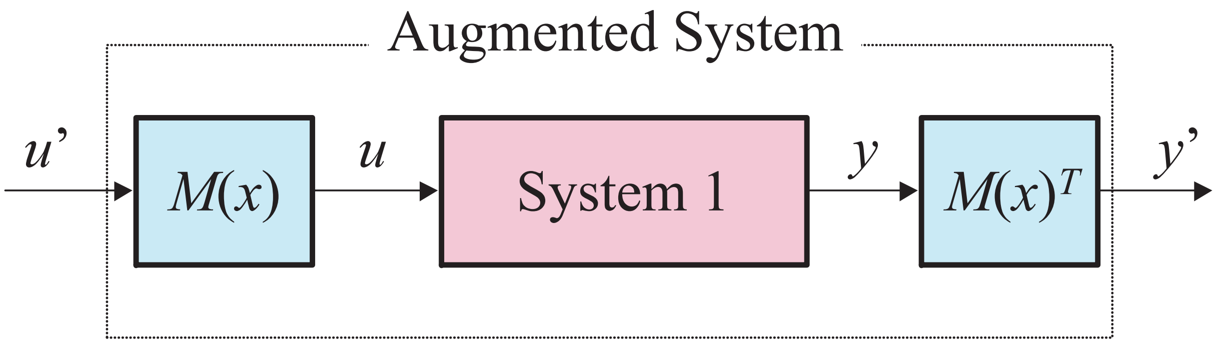
- 受動的な 2 つの系を**並列接続**してできた系も受動的



- 受動的な 2 つの系を**フィードバック結合**した系も受動的



ただし、どちらかの系は直達項を持たないとする。



上記の入出力変換に対しても受動性は保存される。

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} u^T y dt = \int_{t_0}^{t_1} u'^T M(x)^T y dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} u'^T y' dt$$

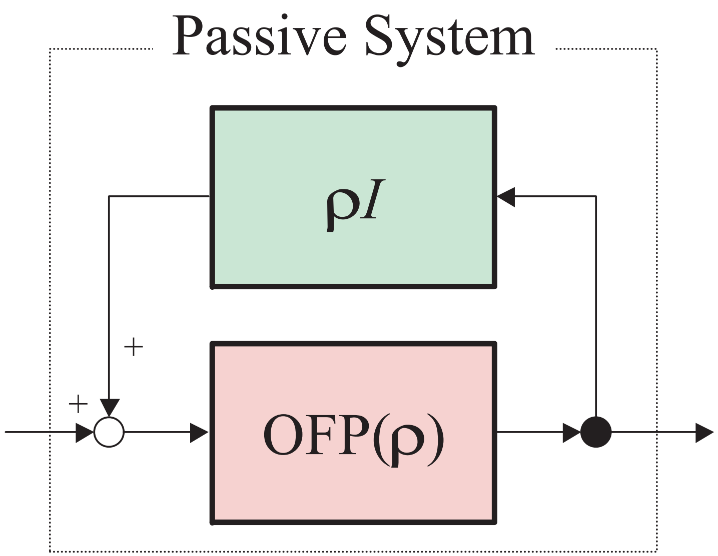
IFP と OFP

OFP(Output Feedback Passivity):

もし、系が、

$$s(u,y) = u^T y - \rho y^T y$$

に関して散逸的ならば、系は OFP(ρ) であるという。

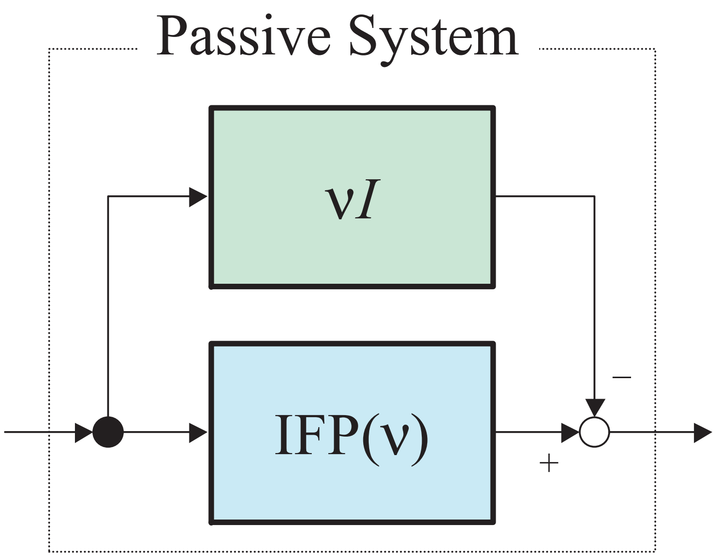


IFP(Input Feedback Passivity):

もし、系が、

$$s(u,y) = u^T y - \nu u^T u$$

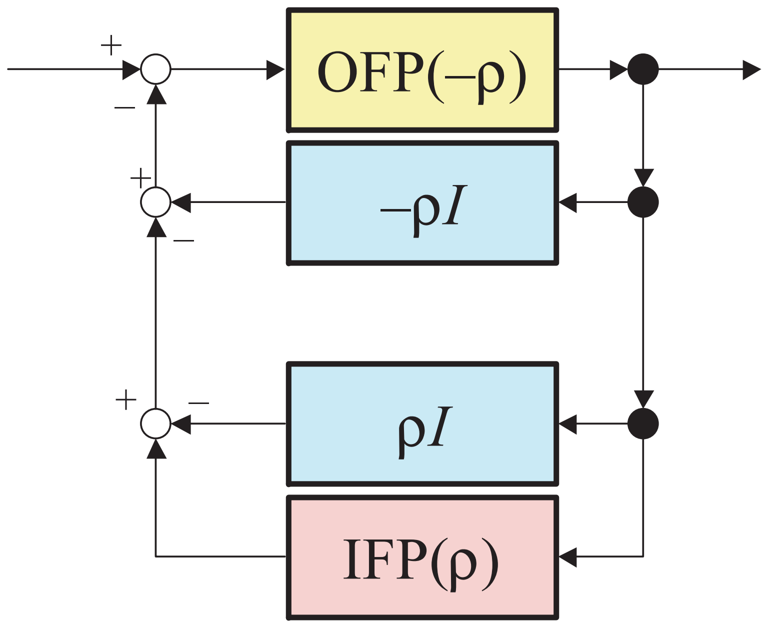
に関して散逸的ならば、系は IFP(ν) であるという。



IFP と OFP な系の性質

α は正の定数とする。

- ✔ 系 Σ が OFP(ρ) なら、$\alpha\Sigma$ は OFP(ρ/α) である。
- ✔ 系 Σ が IFP(ν) なら、$\alpha\Sigma$ は IFP($\alpha\nu$) である。
- ✔ フィードバック結合において、OFP($-\rho$) は IFP(ρ) で打ち消すことができる。



この系は受動的

受動的な系の安定性

準正定の Lyapunov 関数の場合の安定定理:

$$V(0) = 0, \quad V(x) \geq 0, \quad \dot{V} \leq 0$$

なる Lyapunov 関数 $V(x)$ が存在するとする。そのとき、$E = \{x | V(x) = 0\}$ は不変集合となり $x = 0$ を含むが、E 上において $x = 0$ が安定であれば、系は安定となる。

受動的な系の性質:
微分可能な系 $\dot{x} = f(x, u)$, $y = h(x, u)$ において、

1. ストレージ関数が正定であれば、$u = 0$ のとき安定。さらにストレージ関数が放射状に非有界であれば大域的に安定。
2. $u = 0$ のときゼロ状態可検出であれば、$u = 0$ のとき安定。
3. 直達項がない、つまり $y = h(x)$ と書けるとする。そのとき、$u = -ky$ ($k > 0$) のフィードバックで漸近安定となる必要十分条件は閉ループ系がゼロ状態可検出であることである。

ゼロ状態可検出性

システム

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad y = h(x, u)$$

を考える。

■ ゼロ状態可検出性: Zero-State Detectability (ZSD):
このシステムが**ゼロ状態可検出**であるとは、$y \equiv 0$ ならば、

$$x(t) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

となること。

■ ゼロ状態可観測性: Zero-State Observability (ZSO):
このシステムが**ゼロ状態可観測**であるとは、$y \equiv 0$ ならば、

$$x(t) \equiv 0$$

となること。

線形系の場合、ゼロ状態可観測性と通常の可観測性は同じ。

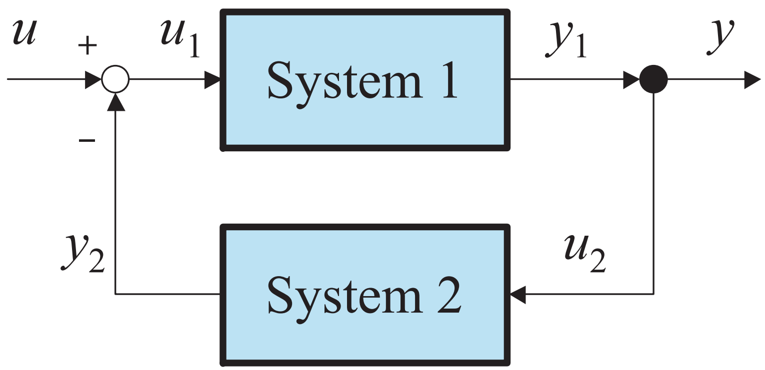
前々ページの証明

1. $u = 0$ のとき供給率は 0 となるので、$V(x)$ をリアプノフ関数とすると、$V(x) \leq 0$ となる。
2. $V(x) \geq 0$ なので、$V(x) = 0$ のとき

$$0 \leq \dot{V}(x) \leq u^T h(x,u), \quad \text{for } {}^\forall u$$

である。一方、$h(x,u)$ は微分可能なので、$h(x,u) = h(x,0) + \eta(x,u)u$ のように分解できる。よって、$V(x) = 0$ のとき、全ての u に対して $u^T h(x,0) + u^T \eta(x,u)u \geq 0$ が必要だが、そのために、$h(x,0) = 0$ である必要がある。つまり、$\{x|V(x) = 0\}$ に含まれる $\dot{x} = f(x,0)$ の最大の不変集合は $\{x|h(x,0) = 0\}$ にも含まれる。ゼロ状態可検出性より、$\{x|V(x) = 0\}$ に含まれる最大の不変集合上でも x は 0 に漸近する。したがって、先に述べた定理より $x = 0$ は安定。
3. 2. と同様に、$V(x) = 0$ ならば、$y = h(x) = 0$。$\dot{V} \leq -kh(x)^T h(x)$ より、系の軌道は、$\{x|h(x) = 0\}$ の集合に漸近。この集合上では、入力は 0 で、ゼロ状態可検出性より、$x = 0$ に漸近するので、十分性は示すことができた。逆も同様。

IFP, OFP な系のフィードバック結合と安定性



- System 1 は、

$$u_1^T y_1 - \rho_1 y_1^T y_1 - \nu_1 u_1^T u_1$$

なる供給率、$V_1(x_1)$ なるストレージ関数に関して散逸的。

- System 2 は、

$$u_2^T y_2 - \rho_2 y_2^T y_2 - \nu_2 u_2^T u_2$$

なる供給率、$V_2(x_2)$ なるストレージ関数に関して散逸的。

$u_1 = 0$, $u_2 = 0$ としたSystem1,2 は、ゼロ状態可検出性がなりたつものとする。
また、ここでは $u = 0$ とする。

1. $\nu_1 + \rho_2 \geq 0$ かつ $\nu_2 + \rho_1 \geq 0$ ならば安定。
2. $\nu_1 + \rho_2 > 0$ かつ $\nu_2 + \rho_1 > 0$ ならば漸近安定。

もし、V_1, V_2 が正定で放射状に非有界なら、1. 2. の性質は大域的。

証明: $V_1 + V_2$ を Lyapunov 関数として、前ページの証明と同様。

係数フィードバックの場合

仮定:
- System 1 は、$u_1 = 0$ でゼロ状態可検出
- V_1 は正定で放射状に非有界

System 2 として、単純な係数フィードバック $y_2 = K u_2$ を考える。

ただし、K は正定対称行列で、K の最小固有値を λ_{min}、最大固有値を λ_{max} とおく。ストレージ関数は、状態レスなので $V_2 = 0$。
$\lambda_{min} - \rho_2 \lambda_{max}^2 - \nu_2 > 0$ を満たす $\rho_2 > 0$, ν_2 に対して、

$$u_2^T y_2 - \rho_2 y_2^T y_2 - \nu_2 u_2^T u_2 \geq (\lambda_{min} - \rho_2 \lambda_{max}^2 - \nu_2) u_2^T u_2 \geq 0$$

前のページの結果を用いれば、

$\lambda_{min} - \rho_2 \lambda_{max}^2 - \nu_2 > 0$ を満たす $^\exists \rho_2 > 0$, $^\exists \nu_2$ に対して、$\nu_1 + \rho_2 > 0$ かつ $\nu_2 + \rho_1 > 0$ ならば大域的漸近安定。

特に

OFP(ρ_1) な System 1 ($\nu_1 = 0$) に対しては、K の固有値を大きく取ることで、必ず大域的漸近安定になる。また、受動的な System 1 ($\rho_1 = 0$, $\nu_1 = 0$) に対しては、K が正定なら必ず大域的漸近安定。

Hill & Moylan の定理

入力に関して線形なシステム:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\
y &= h(x) + j(x)u
\end{aligned}
$$

Hill & Moylan の定理, 1976:
このシステムが可微分ストレージ関数 $V(x)$ によって供給率

$$
s(u, y) = u^T y - \rho y^T y - \nu u^T u
$$

に関して散逸的となるための必要十分条件は、ある k に対して、関数 $q : \Re^n \to \Re^k$, $W : \Re^n \to \Re^{k \times m}$ が存在し、以下を満たすこと。

$$
\begin{aligned}
L_f V &= -\frac{1}{2} q(x)^T q(x) - \rho h(x)^T h(x) \\
L_g V(x) &= h(x)^T - 2\rho h(x)^T j(x) - q^T(x) W(x) \\
W(x)^T W(x) &= -2\nu I + j(x) + j(x)^T - 2\rho j(x)^T j(x)
\end{aligned}
$$

Hill & Moylan の定理より...(1)

Hill & Moylan の定理により、次がなりたつ。

IFP と相対次数: 正の ν に対して IFP(ν) ならば、$j(x)$ は正則である。すなわち相対次数 0 である。

証明: $\rho = 0$ なので、$j(x) + j(x)^T = 2\nu I + W(x)^T W(x)$ が正定となり、なりたつ。

受動的な系のストレージ関数 (重要): $j(x) = 0$ な系がストレージ関数 $V(x)$ に関して受動的ならば、

$$L_f V \leq 0$$
$$L_g V(x) = h(x)^T$$

つまり、$u = 0$ のときに Lyapunov 安定で、かつ出力の関数は上の等式によって厳密に制約を受ける。

証明: $\rho = \nu = 0$ なので、$W(x) = 0$。あとは Hill & Moylan の定理より自明。

Hill & Moylan の定理より...(2)

受動的な系の相対次数: $j(x) = 0$ な系がストレージ関数 $V(x)$ に関して受動的、かつ m 個の各出力が独立ならば、その系は、**原点近傍で相対次数 1** である。すなわち $(L_g h)(0)$ は正則である。

証明: $\partial V/\partial x(0) = 0$ であることを考慮すると、

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0) = \left(g^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)(0)$$

となるが、$\partial^2 V/\partial x^2(0)$ はその準正定性より、$R^T R$ とおける。出力の独立性より、$\partial h/\partial x$ はフルランクを持つので、rank $Rg(0) = m$ である。よって、

$$\text{rank}\,(L_g h)(0) = \text{rank}\,\{g(0)^T R^T R g(0)\} = m$$

となる。

線形系の場合 (1)

Hill & Moylan の定理を受動的な線形系に適用しよう。

正定なストレージ関数をもつ受動的な線形系:

線形系

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

が受動的で正定の二次形式のストレージ関数 $V(x) = x^T Px/2$ **(**$P > 0$**) を持つとすると、適当な行列** L, W **が存在して次がなりたつ。**

$$PA + A^T P = -L^T L$$
$$PB = C^T - L^T W$$
$$W^T W = D + D^T$$

特に $D = 0$ **のとき、**

$$PA + A^T P \le 0$$
$$PB = C^T$$

線形系の場合 (2)

正実性 (Positive Real):

入出力数が等しい線形系 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ (最小実現だと仮定する) が次の条件を満たすとき、その系は正実である (positive real である) という。

1. **Re** $(\lambda_i(A)) \leq 0, \ i = 1, \ldots, n$
2. $H(j\omega) + H(-j\omega)^T \geq 0, \ \forall \omega \notin \lambda_i(A)$
3. A **の虚軸上の固有値** s_i **は単純でその留数行列** $\lim_{s \to s_i} (s - s_i)H(s)$ **はエルミート行列かつ準正定である。**

Positive Real Lemma:

線形系が正定なストレージ関数を持ち受動的であるなら、正実である。

逆に、$H(s)$ が正実なら、その最小実現は、正定なストレージ関数を持ち受動的である。

線形系の場合 (3)

強正実性 (Strictly Positive Real):
入出力数が等しい線形系 $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ (最小実現と仮定) が次の条件を満たすとき、その系は強正実であるという。

1. $\mathrm{Re}\,(\lambda_i(A)) < 0,\ i = 1, \ldots, n$
2. $H(j\omega) + H(-j\omega)^T > 0,\ \forall\omega \notin \lambda_i(A)$
3. $H(\infty) + H(\infty)^T > 0$ あるいは $\lim_{\omega\to\infty} \omega^{2(m-q)} \det[H(j\omega) + H(-j\omega)^T] > 0$、ただし、$q = \mathrm{rank}[H(\infty) + H(\infty)]$。

Kalman-Yakubovich-Popov Lemma: $H(s)$ が強正実である必要十分条件は、$P > 0,\ L,\ W,\ \epsilon > 0$ が存在し、

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P$$
$$PB = C^T - L^T W$$
$$W^T W = D + D^T$$

となること。特に $D = 0$ ならば、$PA + A^T P < 0,\ PB = C^T$。

非線形系の安定余裕

セクタ型非線形要素

セクタ型非線形要素の定義は何通りかある。
本講義では、Vidyasagar の定義を関数の場合に限定し、さらに不等号の等号を取り去ったものを採用する。

局所リプシッツで静的な関数 $y_2 = \phi(u_2)$ に対して、

$$\begin{cases} \left\| y_2 - \frac{\alpha+\beta}{2} u_2 \right\|^2 < \left\| \frac{\beta-\alpha}{2} u_2 \right\|^2 & (u_2 \neq 0) \\ y_2 = 0 & (u_2 = 0) \end{cases}$$

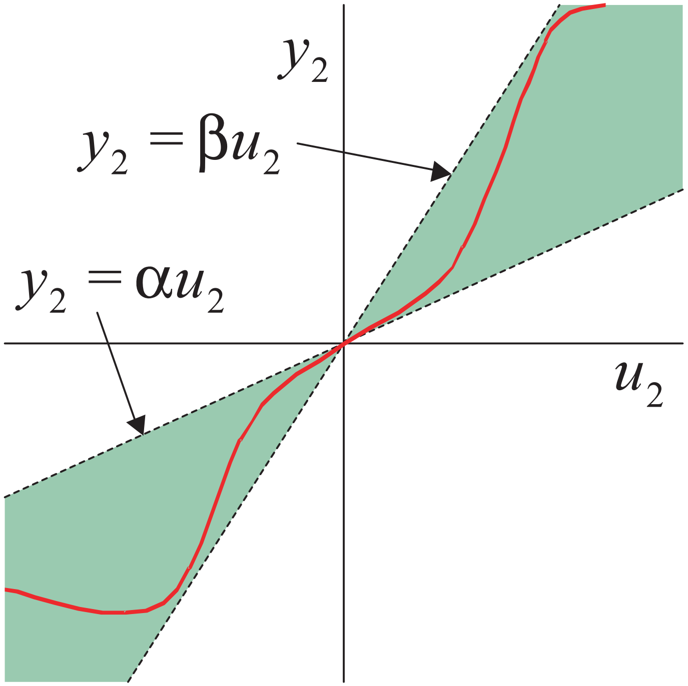
であるならば、これを (α, β) のセクタ型非線形要素という。

$\beta = \infty$ の場合は極限をとって、

$$\begin{cases} u_2^T y_2 > \alpha u_2^T u_2 & (u_2 \neq 0) \\ y_2 = 0 & (u_2 = 0) \end{cases}$$

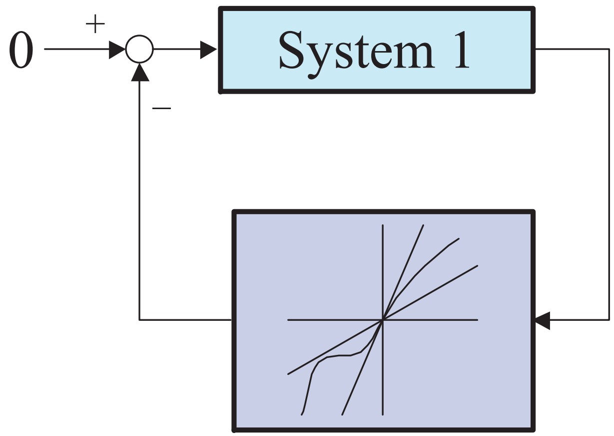
スカラー入出力の場合は、

$$\begin{cases} \alpha u_2^2 < u_2 y_2 < \beta u_2^2 & (u_2 \neq 0) \\ y_2 = 0 & (u_2 = 0) \end{cases}$$



絶対安定性

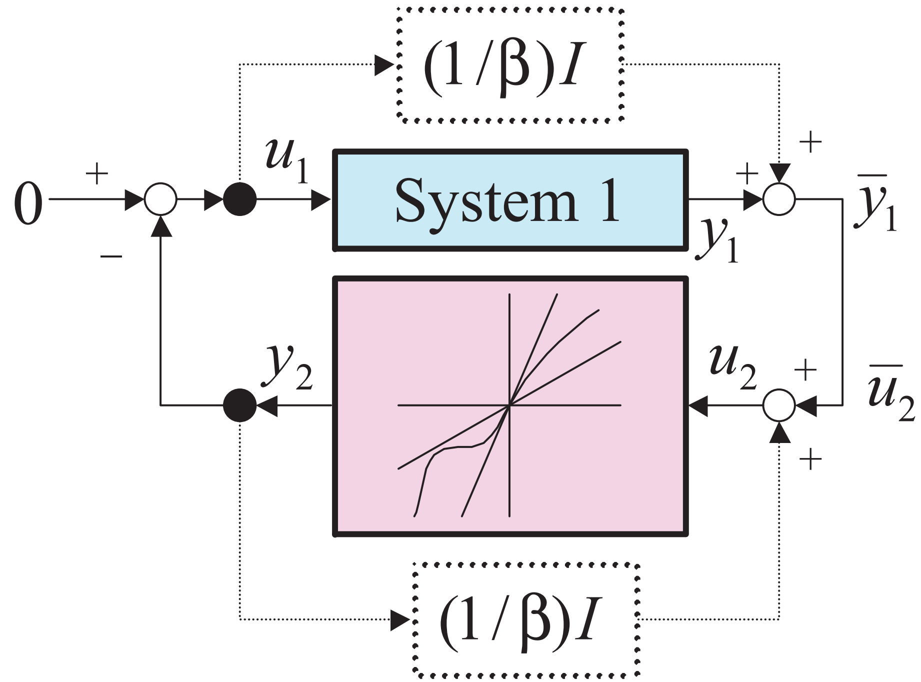
下記の図で、すべての(α, β)のセクタ型非線形要素に対して、そのフィードバック結合が大域的漸近安定ならば、システム 1 は、(α, β)のセクタ型非線形要素に対して絶対安定であるという。



絶対安定性の十分条件

また、システム 1 は直達項を持たずに、ゼロ状態可検出とする。

(α,β) ($\beta>0$) のセクタ型非線形要素に対して絶対安定であるための十分条件は、システム 1 と $(1/\beta)I$ の単純ゲインとの並列接続が、放射状に非有界な微分可能ストレージ関数 $V(x)$ を持ち OFP($-k$) であることである。ここで、$k=\alpha\beta/(\beta-\alpha)$ である。

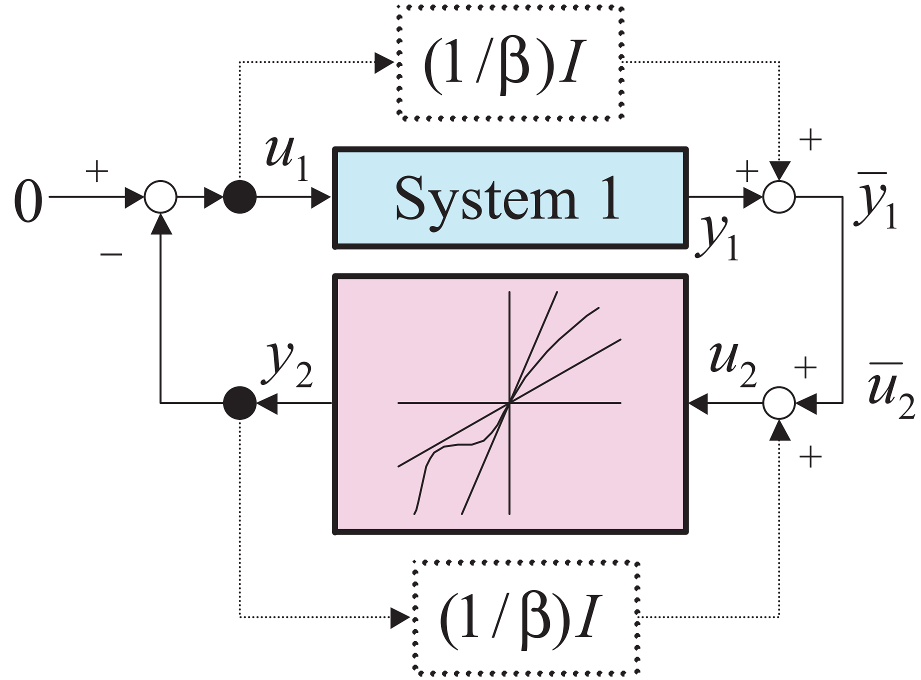


十分条件の証明

証明 OFP($-k$) であることより、

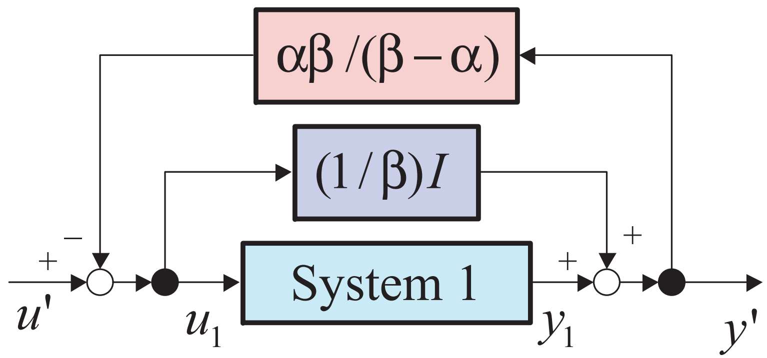
$$\dot{V} \le \bar{y}_1^T(u_1 + k\bar{y}_1) = -\bar{u}_2(y_2 - k\bar{u}_2)$$

ここで、セクタの定義式に $\bar{u}_2 = u_2 + y_2/\beta$ を代入すると、$\bar{u}_2(y_2 - k\bar{u}_2) > 0$ ($\bar{u}_2 \neq 0$) が得られる。よって、$\dot{V} < 0$ ($y_1 \neq 0$) となり、ゼロ状態可検出性より、全系は大域的漸近安定。



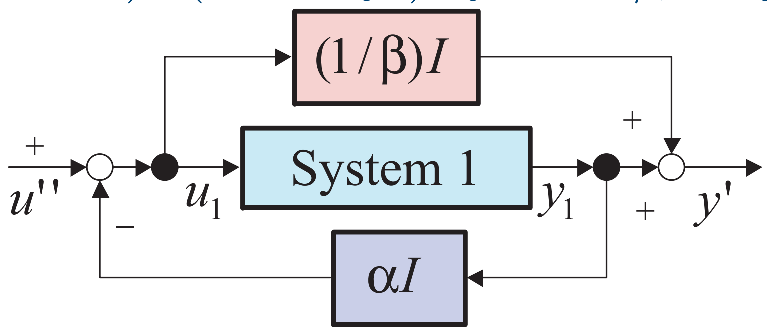
十分条件の別表現 (1)

この十分条件は、



において、u' から y' までの系が受動的になることと同義である。

さらに、$u' = \beta/(\beta-\alpha)\cdot(u_1+\alpha y_1)$, $y' = u_1/\beta + y_1$ **となるので、**



なる系が受動的になることとも同義である。

十分条件の別表現 (2)

これをさらに計算すると、

$$\dot{V}_1 \le u''^T y = (u_1 + \alpha y_1)^T (u_1/\beta + y_1)$$
$$= \frac{\alpha+\beta}{\beta}\left\{u_1^T y_1 + \frac{1}{\alpha+\beta} u_1^T u_1 + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} y_1^T y_1\right\}$$

となる。つまり、

先の十分条件は、システム 1 が供給率、

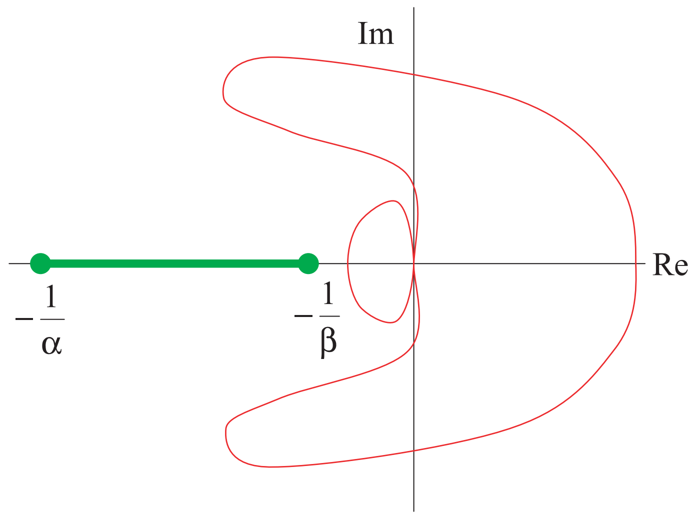
$$u^T y + \frac{1}{\alpha+\beta} u^T u + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} y^T y$$

に関して散逸的となることと同義である。

線形の場合のフィードバック余裕 (1)

直達項を持たない SISO 線形系 $G_0(s)$ のナイキスト線図を考える。簡単のため、$G_0(s)$ の根は虚軸上に無いとし、複素平面の右半面に p 個の極をもつとする。

ゲイン余裕 (Gain Margin): システムが (α, β) のゲイン余裕を持つとは、ナイキスト線図が、$-1/\kappa + j0$ $(\forall \kappa \in (\alpha, \beta))$ を反時計方向に p 回だけ回ることである。

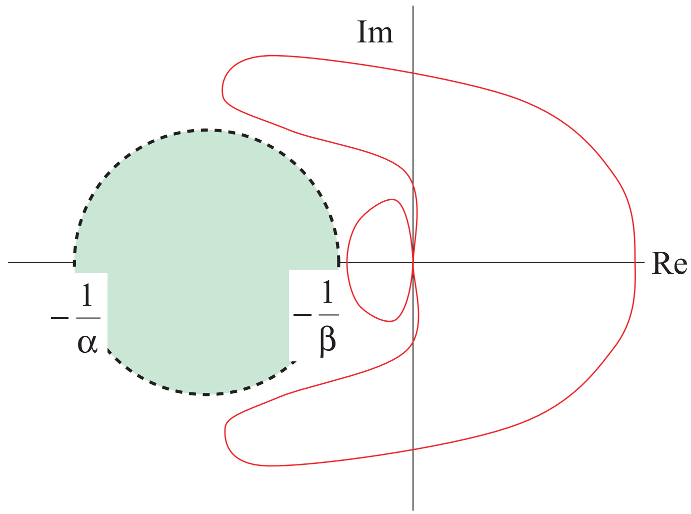


セクタ余裕 (Sector Margin): システムが (α, β) のセクタ余裕を持つとは、セクタ (α, β) に対して絶対安定となることである。

線形の場合のフィードバック余裕 (2)

円盤余裕 (Disc Margin): システムが $D(\alpha,\beta)$ の円盤余裕を持つとは、ナイキスト線図が、$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+j0$ を中心として半径 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$ の円盤 (縁は含まない) に接触せず、反時計方向に p 回だけ回ることである。

この円盤を $D(\alpha,\beta)$ と表記する。



(ゲイン余裕) $\supset$ (セクタ余裕) $\supset$ (円盤余裕)

$\beta > 0$ とする。

円盤余裕と positive real の関係:

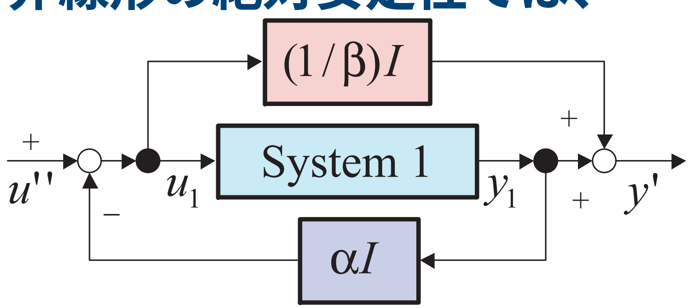
✔ もし、$G_0(s)$ が $D(\alpha, \beta)$ の円盤余裕を持つならば、

$$\bar{G}(s) = \frac{G_0(s) + (1/\beta)}{\alpha G_0(s) + 1}$$

は strictly positive real。

✔ $G_0(s)$ のナイキスト線図が円盤 $D(\alpha, \beta)$ に接触はしないが、$D(\alpha, \beta)$ を p 回よりも少なく回ったとき、$\bar{G}(s)$ は positive real ではない。

非線形の絶対安定性では、



が受動的になることが十分条件。

System 1 が線形系 $G_0(s)$ のとき、

$$\frac{\mathcal{L}[y']}{\mathcal{L}[u'']} = \frac{G_0(s) + (1/\beta)}{\alpha G_0(s) + 1}$$

同じ

円盤余裕と positive real(2)

結局、線形系では positive real $=$ 受動性であり、伝達関数の世界ではいつも可観測であるから、以下の結果が得られる。

<u>円条件 (Disc Criterion):</u> もし、$G_0(s)$ が $D(\alpha, \beta)$ の円盤余裕を持つならば、(α, β) のセクタ余裕を持つ。

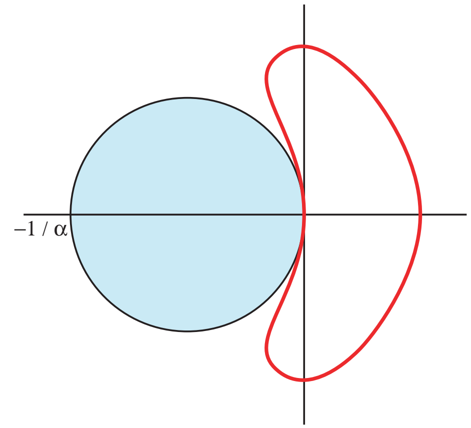
逆は成り立たない。

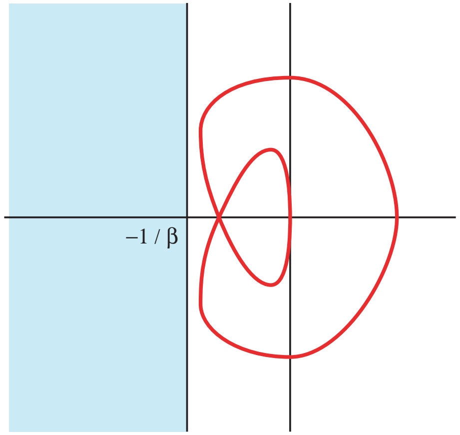
可制御・可観測な線形系に対して以下の事実が成り立つ。

OFP と円盤余裕: 以下の 3 つは等価である。

1. ある正の値 ϵ が存在して、系が OFP($-\alpha+\epsilon$)
2. 円盤余裕 $D(\alpha,\infty)$ を持つ。
3. すべての IFP(ν) ($\nu \geq \alpha$) で大域的漸近安定な線形系とのフィードバック結合が大域的に漸近安定となる。

IFP と円盤余裕: もし、ある正の値 ϵ が存在して、系が IFP($-1/\beta+\epsilon$) ならば、円盤余裕 $D(0,\beta)$ を持つ。逆も真。





受動性を用いた機械系の制御

解析力学の復習

このページから数ページかけて解析力学を復習しよう。

一般化位置: $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$
外力: $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$
運動エネルギー: $T(q, \dot{q})$
ポテンシャルエネルギー: $W(q)$
Lagrangian (Lagrangean と書く人もいる): $L = T - W$

Euler-Lagrange 方程式:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

ベクトル表記すると、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]^T - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right]^T = u$$

普通の機械系では

普通の力学系では、運動エネルギーは、

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$$

のように二次形式で書ける。ここで、$M(q)$ は慣性行列で正定対称。

このときの、Euler-Lagrange 方程式:

$$M(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = u$$

$$c(q,\dot{q}) = c_1(q,\dot{q}) + c_2(q,\dot{q})$$

$$c_1(q,\dot{q}) = \left[\frac{\partial(M(q)\dot{q})}{\partial q}\right]\dot{q} \quad \text{(コリオリ力)},$$

$$c_2(q,\dot{q}) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\dot{q}^T M(q)\dot{q})}{\partial q}\right]^T \quad \text{(遠心力)}$$

$$g(q) = \left[\frac{\partial W}{\partial q}\right]^T \quad \text{(重力項)}$$

Hamiltonian

一般化運動量: $p = \left[\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]^T$

その逆変換: $\dot{q} = \phi(p, q)$

Hamiltonian:

$$H(p, q) = \left.\left[\dot{q}^T p - L(q, \dot{q})\right]\right|_{\dot{q}=\phi(p,q)}$$

運動エネルギーが二次形式 $T = \dot{q}^T M(q)\dot{q}/2$ の場合

一般化運動量: $p = M(q)\dot{q}$

Hamiltonian: $H = \dfrac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + W(q)$

H を q, $\dot{q}$ で表現しなおすと、

$$H = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + W(q) = T + W$$

ルジャンドル変換

L の微小変位: $dL = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] d\dot{q} + \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] dq$

p, $\dot{q}$, L で表現したときの、H の微小変位: $dH = \dot{q}^T dp + p^T d\dot{q} - dL$

dL を代入すると、p の定義より $p^T d\dot{q}$ の項がキャンセルされ、

$$dH = \dot{q}^T dp - \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] dq$$

したがって

$$\left[\frac{\partial H}{\partial p}\right] = \dot{q}^T$$
$$\left[\frac{\partial H}{\partial q}\right] = -\left[\frac{\partial L}{\partial q}\right]$$

H を p, q で表したときの偏微分　　**L を q, $\dot{q}$ で表したときの偏微分**

このような変数変換を Legendre 変換という。

正準方程式

Euler-Lagrange 方程式より、

$$\dot{p} = \left[\frac{\partial L}{\partial q}\right]^T + u$$

この式と、先に得られた関係式より、次の式が得られる。

Hamilton の正準方程式: p, q で表した運動方程式は

$$\dot{q} = \left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]^T$$

$$\dot{p} = -\left[\frac{\partial H}{\partial q}\right]^T + u$$

Hamiltonian system の受動性

Port controlled Hamiltonian system: 入出力付の Hamiltonian system

$$\dot{q} = \left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]^T$$

$$\dot{p} = -\left[\frac{\partial H}{\partial q}\right]^T + u$$

$$y = \left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]^T (= \dot{q})$$

$$\dot{H} = u^T y$$

Port controlled Hamiltonian system は H をストレージ関数として受動的

単純な係数フィードバックの場合

これ以降は、Port-Controlled Hamiltonian System の制御を考える。

仮定:

- ✔ 運動エネルギーが、二次形式 $T = \dot{q}^T M(q)\dot{q}/2 = p^T M(q)^{-1} p/2$ の形をしていると仮定 ($M(q) \geq M_0 > 0$)。
- ✔ ポテンシャルエネルギー $W(q)$ の最小値が存在すると仮定。その最小値を 0 と置いても一般性は失われない。

単純に $u = -ky = -k\dot{q}$ なるフィードバックを施せば、$\dot{H} = -ky^T y = -k\dot{q}^T \dot{q}$。つまり $p \to 0$ $(t \to \infty)$ となり、系は安定化される。さらに、W が q に関して正定かつ放射状に非有界で $\partial W/\partial q \neq 0$ $(x \neq 0)$ ならば、不変定理より系は大域的に漸近安定。

$u = -k\dot{q}$ なるフィードバック (D 制御):
　　$W(q) = 0$ となる平衡点に対して漸近安定

ポテンシャル関数 W を別なものにできれば都合が良い

ポテンシャル関数の改変

希望するポテンシャル関数: $\overline{W}(q)$ (q **に関して正定かつ放射状に非有界で、**$\partial\overline{W}/\partial q \neq 0$ ($x \neq 0$))

新しい Hamiltonian:
$$\bar{H}(p,q) = H(p,q) - W(q) + \overline{W}(q) = T(p,q) + \overline{W}(q)$$

$$\left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]^T = \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial p}\right]^T, \qquad \left[\frac{\partial H}{\partial q}\right]^T = \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial q}\right]^T + \left[\frac{\partial W}{\partial q}\right]^T - \left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial q}\right]^T$$

正準方程式に代入

$$\dot{q} = \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial p}\right]^T$$

$$\dot{p} = -\left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial q}\right]^T - \left[\frac{\partial W}{\partial q}\right]^T + \left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial q}\right]^T + u$$

$$y = \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial p}\right]^T \ (= \dot{q})$$

正準変換

新しい Hamiltonian に関して正準方程式の形になるように、フィードバックを決める。

入力変換 (フィードバック): $u = g(q) - \left[\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial q}\right]^T + \bar{u}$

変換後の port controlled Hamiltonian system:

$$\dot{q} = \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial p}\right]^T \qquad y = \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial p}\right]^T (= \dot{q})$$

$$\dot{p} = -\left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial q}\right]^T + \bar{u}$$

- ✔ 正準変換、つまりハミルトニアンの改変+入力変換で、別の port controlled Hamiltonian system が導かれる。
- ✔ 変換後のシステムも受動性を満たし、$\bar{u} = -ky$ で安定化可能。今度は、**設計者が選んだポテンシャル関数の底に収束。**

二次のポテンシャルの場合 (1)

新しい ポテンシャル関数が二次形式 の場合を考える。

$$\overline{W} = \frac{k_1}{2}(q - q_0)^T (q - q_0)$$

ただし、$k_1 > 0$ で、q_0 は q の目標値。
すると、入力変換の式は、

$$u = g(q) - k_1(q - q_0) + \bar{u}$$

となる。

さらに、$\bar{u} = -k_2 y = -k_2 \dot{q}$ ($k_2 > 0$) とすれば、$\overline{W}(q) = 0$ なる点 (上記の場合は q_0) に大域的に漸近安定。

二次のポテンシャルの場合 (2)

二次形式ポテンシャルの場合の最終的なコントローラ:

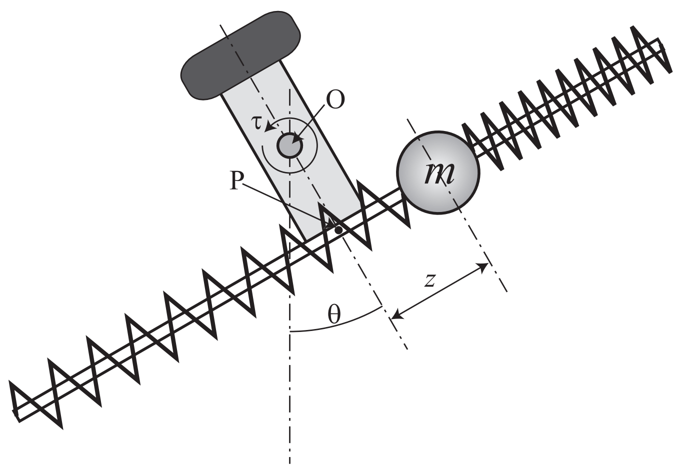
$$u = g(q) - k_2\dot{q} - k_1(q - q_0)$$

- ✔ $g(q)$: **重力項の補償**
- ✔ $-k_2\dot{q}$: **仮想的な粘性摩擦項。D(微分)-制御。**
- ✔ $-k_1(q - q_0)$: **位置制御項。P(比例)-制御。**

重力項補償した後に PD 制御すれば大域的に漸近安定

非線形システムであるにもかかわらず、
重力項補償+線形フィードバックのみで大域的に漸近安定化できる。
$\Rightarrow$ **元々のダイナミクスの持つ性質を利用した制御**
(dynamic-based control)

例題 (1)



- ✔ 質量 m のおもりが摩擦のないレール上を滑っている。
- ✔ そのおもりは 2 つのバネで支えられ、その合成バネ定数は K。
- ✔ 点 O を中心にして回転し、図の OP の長さは L。
- ✔ 質量 m のおもりを除いた重心は O に一致し、質量 m のおもりを除いた部分の慣性モーメントは J。
- ✔ 重力加速度を G とおく。
- ✔ 回転軸はトルク τ で駆動されている。$\rightarrow$ 入力
- ✔ 線形近似の可制御性条件 $LK \neq mG$ が成り立つ。

例題 (2)

- **P を基準にした質量 m の位置を z、鉛直下方を基準とした OP の角度を θ とする。**
- **一般化位置ベクトルを $q = (q_1, q_2)^T = (\theta, z)^T$，一般化速度ベクトルを $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T = (\dot{\theta}, \dot{z})$ とおく。また q に対応する一般化運動量ベクトルを p とおく。**
- **制御入力は $u = \tau$，状態は $x = (q^T, \dot{q}^T)^T = (\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z})^T$、あるいは $\tilde{x} = (q^T, p^T)^T$ とする。**

運動エネルギー:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{J}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\{(z^2 + L^2)\dot{\theta}^2 + 2L\dot{\theta}\dot{z} + \dot{z}^2\} \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \begin{bmatrix} J + m(L^2 + z^2) & mL \\ mL & m \end{bmatrix} \dot{q}
\end{aligned}
$$

ポテンシャルエネルギー:

$$
U = \frac{K}{2}z^2 + mg(L + y_m) = \frac{K}{2}z^2 + mg\{L(1 - \cos\theta) + z\sin\theta\}
$$

例題 (3)

ラグランジアン: $L = T - U$

オイラー・ラグランジュ方程式:

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 2mz\dot{\theta}\dot{z} + mG(z\cos\theta + L\sin\theta) \\ -mz\dot{\theta}^2 + Kz + mG\sin\theta \end{pmatrix}$$

一般化運動量: $p = M(q)\dot{q}$

ハミルトニアン: $H = \dfrac{1}{2}p^T M(q)^{-1} p + U(q)$

正準方程式:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} (= \dot{q})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

例題 (4)

実は、このハミルトニアンは正定関数でない。

改変されたハミルトニアン: $\bar{H} = H + \dfrac{k_1}{2} q_1^2$

$\boxed{\bar{H}(\tilde{x})\text{ は、}k_1 > m^2G^2/K\text{ ならば、正定関数。}}$

入力変換: $u = -k_1 q_1 + v$

変換後の正準系:

$$\dot{q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} (= \dot{q})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_1} = \dot{q}_1$$

これは、受動的。

例題 (5)

ゼロ状態可検出性を検証する。$y=0$, $u=0$ のとき、$q_1=\theta=\theta_0$ (const.), $\dot{\theta}=0$, $\ddot{\theta}=0$ であるが、このとき運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
&mL\ddot{z}+mG(z\cos\theta_0+L\sin\theta_0)+k_1\theta_0=0\\
&m\ddot{z}+Kz+mG\sin\theta_0=0
\end{aligned}
$$

$\ddot{z}$ を消去すると、

$$k_1\theta_0=z(LK-mG\cos\theta_0)$$

$LK-mG\cos\theta_0\neq 0$ ならば、z について解くことができ、z は定数 z_0。$z=z_0$, $\dot{z}=0$, $\ddot{z}=0$ を再度代入し、今度は z_0 を消去すると、

$$
\begin{aligned}
&Kk_1\theta_0+mG(KL-mG\cos\theta_0)\sin\theta_0\\
&\quad=Kk_1\theta_0+mGKL\sin\theta_0-\frac{m^2G^2}{2}\sin 2\theta_0=0
\end{aligned}
$$

$k_1>\max\{m^2G^2/K, mG(KL+mG)/4\}$ に対し、右辺の符号は θ_0 の符号と一致し、$\theta=\theta_0=0$。また、θ_0 と z_0 の関係式より、$z=z_0=0$。

例題 (6)

もし、$LK - mG\cos\theta_0 = 0$ ならば、$\ddot{z}$ を消去した式より、$\theta_0 = 0$。これは、$LK = mG$ のようにパラメータを選んだときしか現れない。(共鳴条件)
線形近似系の可制御性より共鳴条件は成り立たないので、$LK - mG\cos\theta_0 \neq 0$ が結論できる。

以上により、ゼロ状態可検出性が成り立つので、フィードバック $y = -k_2 y$ は原点を大域的漸近安定化する。

漸近安定化制御則

$$u = -k_1 q_1 - k_2 \dot{q}_1$$

ただし、$k_1 > \max\{m^2G^2/K, mG(KL+mG)/4\}$，$k_2 > 0$。

制御リアプノフ関数

状態フィードバック系の Lyapunov 関数の必要条件 (1)

前提: あるシステム:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

に対して、ある状態フィードバック制御則 $u = \alpha(x)$ が設計され、ある放射状に非有界な Lyapunov 関数 $V(x)$ のもとで閉ループ系:

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x) + g(x)\alpha(x)$$

が大域的漸近安定とする。

さて、そのとき $V(x)$ が満たすべき条件を求めよう。

状態フィードバック系の Lyapunov 関数の必要条件 (2)

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\{f(x)+g(x)\alpha(x)\} \\
&= L_fV(x) + (L_gV(x))\alpha(x) < 0, \quad (x \neq 0)
\end{aligned}
$$

であるから、
一見、$\alpha(x)$ を L_gV と反対の符号で大きくとれば、必ず $\dot{V}$ は負にできる

しかし、$L_gV(x)=0$ **なる点においては、**V **の微分に入力** $u=\alpha(x)$ **は直接効かない。**
$\Rightarrow$ **そのような点で** $L_fV<0$ **(**$x\neq 0$**) である必要。**

リアプノフ関数 $V(x)$ **の必要条件:**
$L_gV(x)=0$ **かつ** $x\neq 0$ **なる点** x **において、**$L_fV(x)<0$**.**

この条件は、制御則 $\alpha(x)$ **によらずに成り立たねばならない。**

制御リアプノフ関数

制御リアプノフ関数 (Control Lyapunov function, clf):
関数 $V(x)$ が、系 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ に対して制御リアプノフ関数 (clf) であるとは、
- ✔ $V(x)$ は滑らかで放射状に非有界な正定関数
- ✔ $L_gV(x) = 0$ かつ $x \neq 0$ なる点で、$L_fV(x) < 0$

が成り立つことである。

これは、閉ループ系のリアプノフ関数の 必要条件。

次のページ以降では、逆に、clf が存在すれば、(原点付近で入力が発散する場合を許容して、) 系を漸近安定化する状態フィードバック制御則 $\alpha_s(x)$ が作れることを示そう。

Sontag-type 制御則

Clf $V(x)$ が存在するなら、
Sontag-type 制御則:

$$
u = \alpha_s(x) =
\begin{cases}
-\dfrac{L_fV + \sqrt{(L_fV)^2 + (L_gV(L_gV)^T)^2}}{L_gV(L_gV)^T}(L_gV)^T, & L_gV \neq 0 \\
0, & L_gV = 0
\end{cases}
$$

は、系を漸近安定化する。

つまり、漸近安定化するだけが目的ならば、制御則そのものを設計するかわりに、clf を見つけることで、目的は達成できる。

Sontag-type 制御則による漸近安定化

Sontag-type 制御則により系が漸近安定化されることを、確認する。

Sontag-type 制御則のもとでの clf $V(x)$ の時間微分を計算する。

✔ $L_gV \neq 0$ **のとき:**

$$\begin{aligned}\dot{V} &= L_fV + L_gV\alpha_s(x) \\ &= L_fV - \left\{L_fV + \sqrt{(L_fV)^2 + (L_gV(L_gV)^T)^2}\right\} \\ &= -\sqrt{(L_fV)^2 + (L_gV(L_gV)^T)^2} < 0\end{aligned}$$

✔ $L_gV = 0$, $x \neq 0$ **のとき:**

$$\dot{V} = L_fV < 0$$

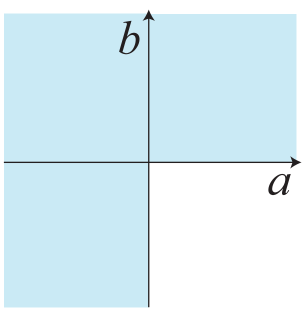
つまり、$\dot{V}$ は負定　$\Rightarrow$ よって、系は大域的に漸近安定となる。

Sontag-type 制御則の連続性

Sontag-type 制御則には、L_gV が 0 かどうかの条件判定が付いているが、$\alpha_s(x)$ は $L_gV = 0$ の面を境に不連続とならないであろうか?

補題: 関数

$$\phi(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{if } b = 0 \text{ and } a < 0 \\ -\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



は、$S = \{(a,b) \in \Re^2 \mid b > 0 \text{ or } a < 0\}$ 上で実解析的である。

証明: p に関する 2 次方程式、$F(a,b,p) = bp^2 - 2ap - b = 0$ を考える。これの S 上での解は $p = \phi(a,b)$ である ($b = 0$, $a < 0$ なる係数も含む)。

$$\frac{\partial F}{\partial p}(a,b,\phi(a,b)) = 2\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0, \ \ (a,b) \in S$$

であるから、陰関数定理より、$\phi(a,b)$ も実解析的である。

Sontag-type 制御則の連続性 (続き)

原点近傍以外での解析性:
$V(x)$ が制御リアプノフ関数ならば、Sontag-type 制御則 $\alpha_s(x)$ は原点近傍を除き実解析的である。

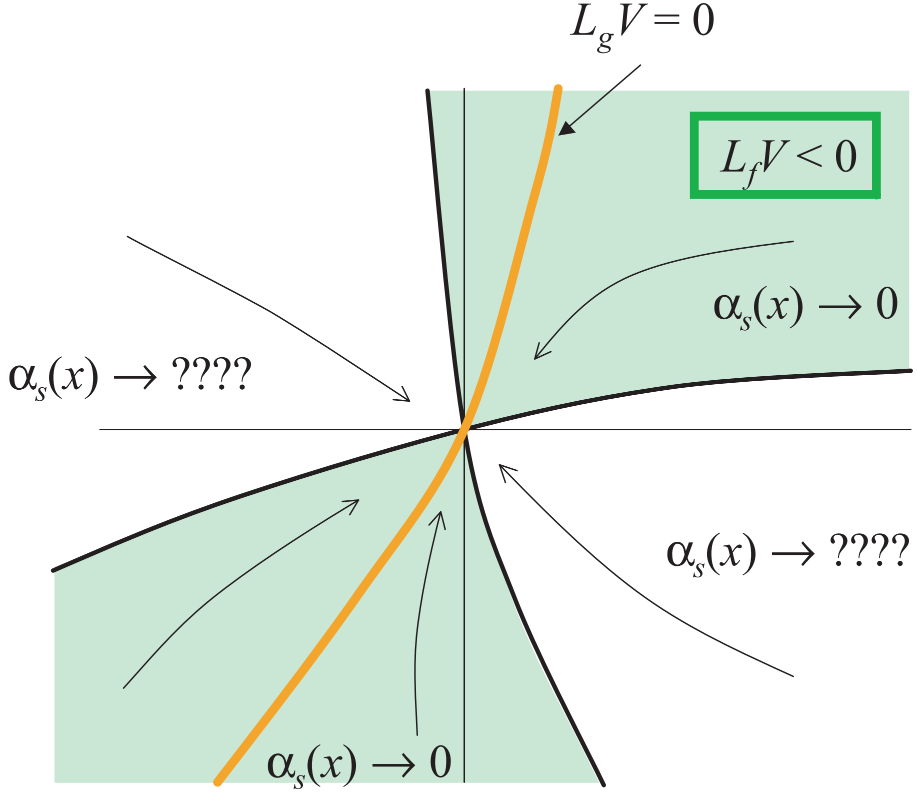
証明: 前ページの補題に、$a = L_fV$, $b = L_gV(L_gV)^T$ を代入して考える。

$$\alpha_s(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -\phi(L_fV, L_gV(L_gV)^T)(L_gV)^T, & x \neq 0 \end{cases}$$

であるので、明らかに、$\alpha_s(x)$ は原点近傍を除き実解析的である。

原点近傍での Sontag-type 制御則

原点近傍では、Sontag-type 制御則はどうなっているのであろうか。



$L_fV > 0$ の領域から近づく場合は、$\alpha_s(x)$ が何に漸近するかは、一概に言えない。(L_gV と L_fV の原点近傍の x に関するオーダーの問題)

$\Rightarrow$ **原点で α_s が発散する可能性。**

小入力特性

小入力特性 (Small Control Property, scp): Clf $V(x)$ が、小入力特性を満たしているとは、原点近傍で連続な制御則 $\alpha_c(x)$ ($\alpha_c(0) = 0$) が存在して、

$$L_f V(x) + L_g V(x)\alpha_c(x) < 0, \quad {}^\forall x \neq 0$$

となることである。

Scp のもとでの Sontag-type 制御則の連続性: Scp が満たされる、すなわち $V(x)$ を Lyapunov 関数とし原点でゼロとなるような原点近傍で連続な制御則が 1 つでもあれば、Sontag-type 制御則も連続である。

証明は次のページ

小入力特性 (続き)

証明: 原点以外では解析的であるので、原点周りだけを調べればよい。

$$|L_f V| \le |L_g V||\alpha_c|, \quad L_f V \ge 0$$

であるので、

$$|\alpha_s| \le |\alpha_c| + \sqrt{|\alpha_c|^2 + |L_g V|^2}, \quad L_f V \ge 0$$

である。一方、

$$|\alpha_s| \le |L_g V|, \quad L_f V \le 0$$

である。α_c, $L_g V$ ともに連続であるから、α_s も連続。

Scp を満たす clf $V(x)$ が存在すれば、Sontag-type 制御則を用いることにより大域的漸近安定可能

大域的漸近安定可能性と clf

実は逆もいえて、必要十分条件となる。

定理: 解析的な系 $\dot{x} = f(x) + g(x)u \;\; f(0) = 0$ が、原点でゼロとなる連続な状態フィードバック制御則によって、大域的漸近安定化できるための必要十分条件は、scp を満たす無限界微分可能な clf $V(x)$ が存在することである。

ここでは、clf は解析的ではなく無限回微分可能に弱められている。これは逆リアプノフ定理の制限によるもの。

結論としては、

もし原点でゼロになる連続状態フィードバック制御則で大域的漸近安定化が可能であるようなシステムに対しては、常に、scp を満たす無限回微分可能な clf $V(x)$ が存在し、Sontag-type 制御則は連続となり大域的漸近安定化が達成される。