

# メカトロニクス基礎 (振動学・解析力学)

山下 裕

# 本講義資料

---

URL:

<http://stlab.ssi.ist.hokudai.ac.jp/yuhyama/lecture/mechatronics>



# 振動学

## 第1章

# 振動学 = 物の振動を扱います

---

- ▶ 材料力学は**静的な**変形・内力を扱っていました。
- ▶ ここでは、動きを伴う**動的な**変形、特に**振動**を扱います。
  
- ▶ なぜ、振動に着目するのか？(機械的な振動の場合)
  - ▶ 制振・免震 (建物・車両・精密機器etc...)
  - ▶ 構造・機構上の問題で、あるいはそもそもの目的として、「物を振動させる」ことが必要な場合がある。
  - ▶ 共振を避ける (共振すると、最悪、破壊が起きる。たとえば、軸の回転の危険速度)

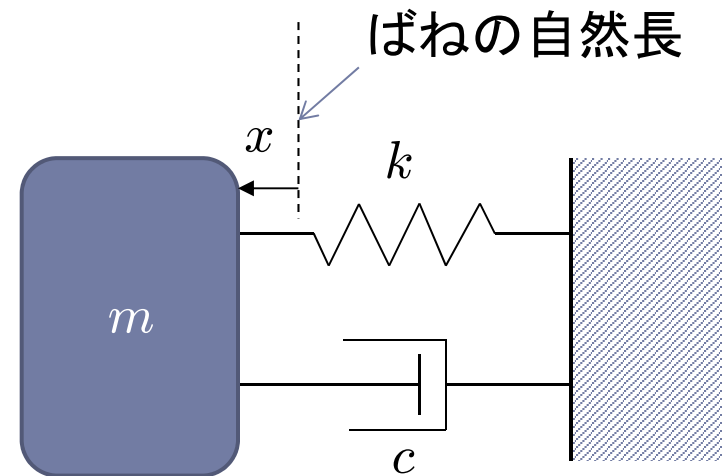
# 基本的な運動方程式

- ▶ 振動が起きるのは、(実質的に)2階以上の微分方程式
- ▶ Mass-Spring-Damper システム (一番単純なシステム)

微分方程式:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

加速度項   粘性   ばね   外力  
                  摩擦   力



$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{1}{m}f$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$\omega_n$  : 無減衰系の固有角周波数

$\zeta$  : 減衰比

## 2階線形常微分方程式の解 (1)

- ▶ しばらくは外力ゼロ( $f = 0$ )として考える。→ 自由振動
- ▶ 特性方程式:  $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$
- ▶ 相異なる実数解 $\lambda_1, \lambda_2$ を持つ場合( $c^2 - 4mk > 0$  あるいは  $\zeta > 1$ )  
$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$
- ▶ 重解 $\lambda_1$ を持つ場合( $c^2 - 4mk = 0$  あるいは  $\zeta = 1$ )  
$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 t \exp(\lambda_1 t)$$
- ▶ 虚数解  $r \pm j\omega$  を持つ場合( $c^2 - 4mk < 0$  あるいは  $\zeta < 1$ )  
$$x(t) = C_1 e^{rt} \sin(\omega t) + C_2 e^{rt} \cos(\omega t)$$

- ▶ 虚数解を持つ場合のみ、振動的。
- ▶ 特性方程式の解の実数部が負であることが、解がゼロに収束するための必要十分条件。(漸近安定性)

## 2階線形常微分方程式の解 (2)

- ▶  $m > 0, c > 0, k > 0$  ならば、必ず特性方程式の解の実部は負、すなわち漸近安定。
- ▶  $m > 0, c = 0, k > 0$  ならば、必ず特性方程式の解は純虚数で、安定だが漸近安定ではない。この場合、微分方程式の解は定常的に振動する(減衰しない)。
- ▶  $m > 0, c > 0, k > 0$  の範囲で、 $c$  だけを小さくしていくと特性方程式の解は虚数となり、振動的になる。
- ▶  $c$  が小さいとき( $\zeta$ が小さいとき)、特性方程式の解は、

$$\lambda = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) = -\omega_n\zeta \pm \omega_n \left(1 - \frac{\zeta^2}{2}\right) j + O(\zeta^3)$$

2乗のオーダー  
→ 微小

- ▶  $c$  が小さいとき、その振動角周波数は、ほとんど

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# 無減衰の場合 (調和振動子)

- ▶ 減衰項がない自由振動 ( $c = 0$  あるいは  $\zeta = 0$ )

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

- ▶ 微分方程式の解:  $\Rightarrow$  **無減衰の場合は持続的な振動**

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) \\ &= A \cos(\omega_n t + \phi) \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

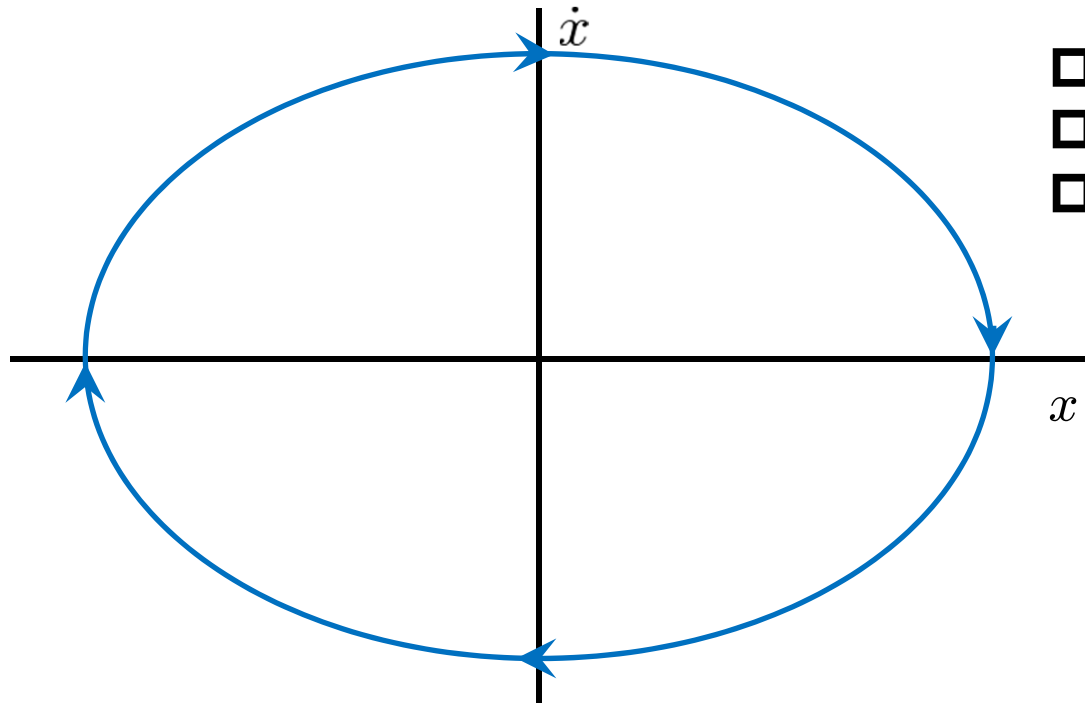
$$\phi = \arg(C_1, -C_2) \left( = \tan^{-1} \frac{-C_2}{C_1} \quad (\text{if } C_1 > 0) \right)$$

- ▶ 振動角周波数は  $\omega_n$  (無減衰系の固有角周波数)
- ▶  $A$ は振幅,  $\phi$ は位相と呼ばれる。



# 調和振動子の相図 (Phase portrait)

- ▶ 相図 (横軸  $x$ , 縦軸  $\dot{x}$  でプロット)



- 右回り
- 縦/横 =  $\omega_n$
- 周期は  $2\pi / \omega_n$

- ▶ エネルギー保存則:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

⇒ エネルギー一定の曲線上を動く

# 減衰振動

- ▶ 減衰振動 ( $0 < \zeta < 1$ )の場合:

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \rightarrow \text{減衰振動の固有角周波数}$$

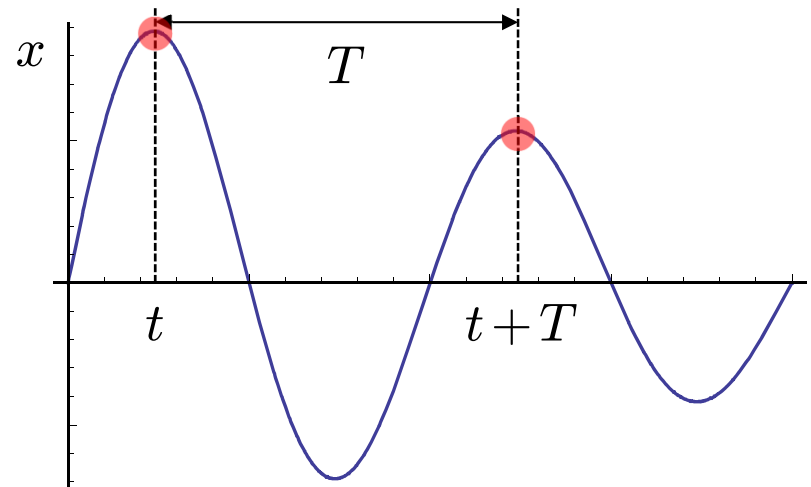
- ▶ 1周期後( $t + T$ )に $x(t)$ はどれだけ減衰しているか? (周期:  $T = 2\pi / \omega_d$ )

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\zeta\omega_n T} = e^{-\delta}$$

- ▶ 対数減衰率:

$$\delta = \zeta\omega_n T = 2\pi\zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

⇒ 時間軸の伸縮を許した応答波形の「見た目」は $\zeta$ のみによって決まる。



# 重力が働く場合

- ▶ 重力(gravity)が働くMass-Spring-Damper系

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - mg = f$$

重力項 (gravity force)

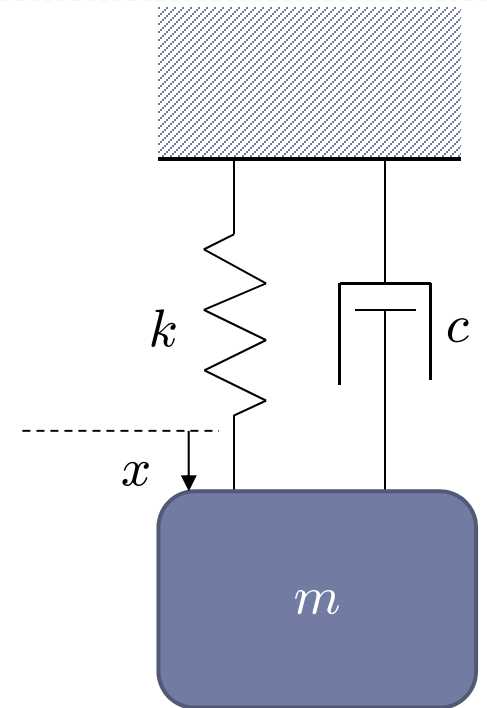
- ▶ 新しい座標:  $z = x - mg/k$
- ▶ 新しい座標で考えた微分方程式

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = f$$

⇒重力なしの場合と同じ式

- ▶ つまり、

重力が働く場合は、位置変数の原点を自然長と取るのではなく、  
重力とつりあって静止している位置を原点とすれば、  
重力なしの場合と同じ微分方程式になる。



# さまざまな 1 自由度振動系 (1)

- ▶ ねじり棒ばね(torsion bar) による振動

$$J\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

弾性軸自体の慣性モーメントは無視

$J$ : おもりの慣性モーメント (Inertia moment)

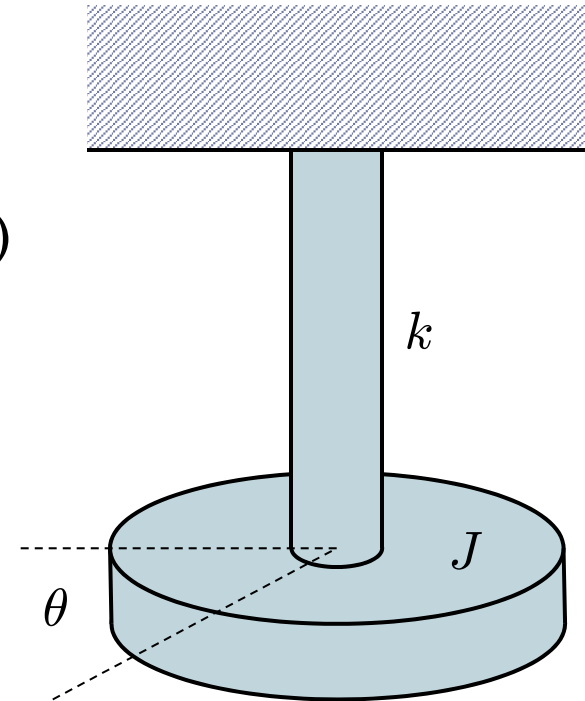
$k$ : 弾性軸のねじりこわさ (丸棒の場合)

$$k = \frac{\pi G d^4}{32 \ell}$$

$G$ : 横弾性係数

$d$ : ねじり棒ばねの直径

$\ell$ : ねじり棒ばねの長さ



# さまざまな1自由度振動系 (2)

- ▶ はり(梁; beam)の振動:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$k$ : はりのこわさ

- ▶ さまざまなはりに対する  $k$

片持ち梁

$$k = \frac{3EI}{\ell^3}$$

両端支持

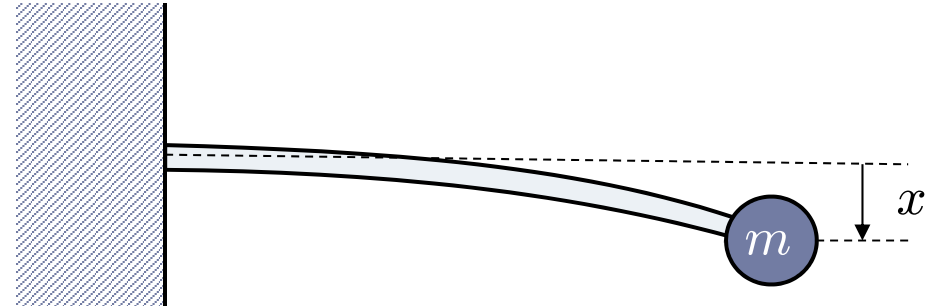
$$k = \frac{3EI\ell}{\ell_1^2\ell_2^2}$$

両端固定

$$k = \frac{3EI\ell^3}{\ell_1^3\ell_2^3}$$

左固定-右支持

$$k = \frac{12EI\ell^3}{\ell_1^3\ell_2^2(3\ell + \ell_2)}$$



$E$ : 弾性係数

$I$ : 断面2次モーメント

$\ell$ : 梁の長さ

$\ell_1$ : 錘から左端までの長さ

$\ell_2$ : 錘から右端までの長さ

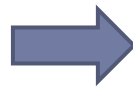
# さまざまな 1 自由度振動系 (3)

▶ 液柱の振動：

$$\gamma A l \ddot{x} + 2\gamma A g x = 0$$

↓

$$l \ddot{x} + 2g x = 0$$



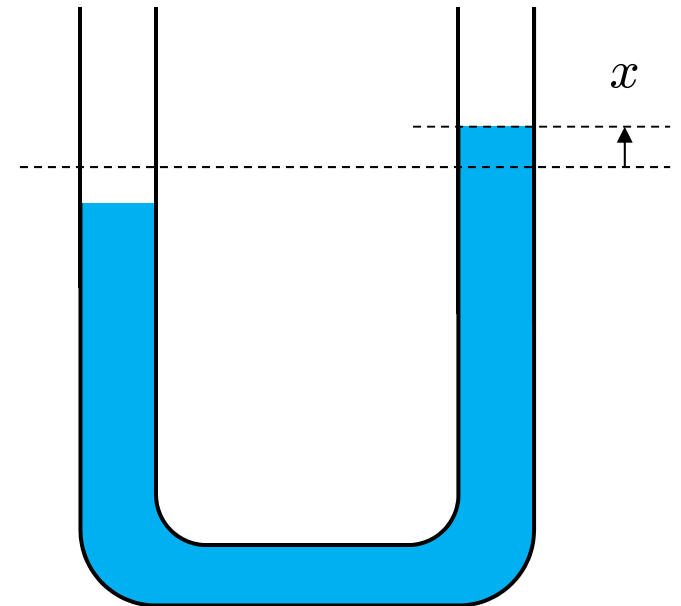
$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

$l$ ：液柱の長さ

$A$ ：パイプの断面積

$\gamma$ ：比重

$g$ ：重力加速度



# 2質点系

- ▶ 2つの錘がバネで結合されている。
- ▶ 2つの錘を合わせた重心位置の動きには興味がない。相対位置の動きだけに興味がある。→ 1自由度系になる

- ▶  $m_1$ の位置:  $x_1$ ,  $m_2$ の位置:  $x_2$
- ▶  $x = x_1 - x_2 - d$  ( $d$ : バネの自然長)
- ▶ 運動方程式:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x} + kx = 0$$

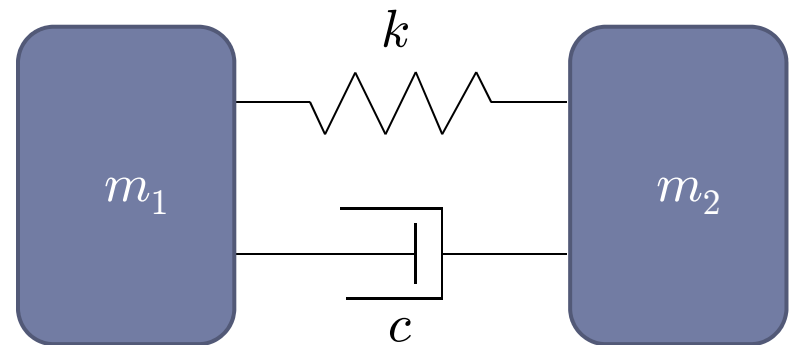
$$m_2 \ddot{x}_2 - c \dot{x} - kx = 0$$



- ▶ 相対運動だけを記述する運動方程式:

$$M \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

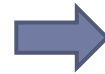
$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \text{等価質量}$$



# LCR回路も同じ式 (1)

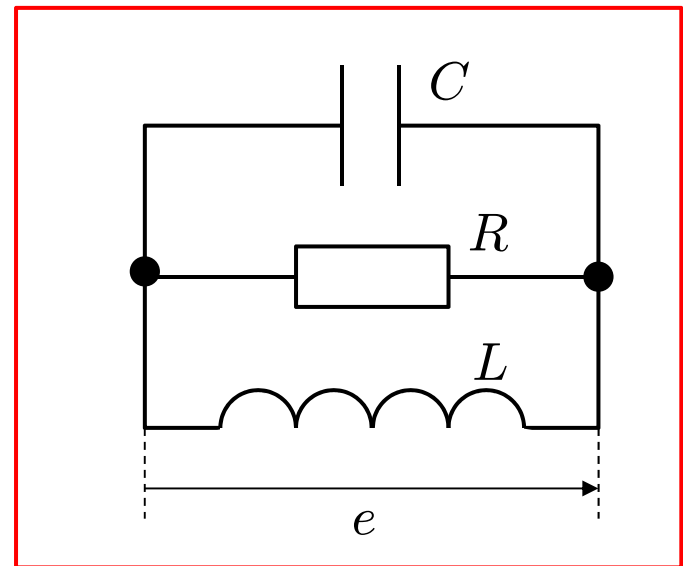
## ▶ 並列回路 (アドミッタンスの見方)

$$C\dot{e} + \frac{1}{R}e + \frac{1}{L} \int_0^t e(\tau)d\tau = 0$$



$$C\ddot{E} + \frac{1}{R}\dot{E} + \frac{1}{L}E = 0$$

$$E = \int_0^t e(\tau)d\tau$$





# LCR回路も同じ式 (2)

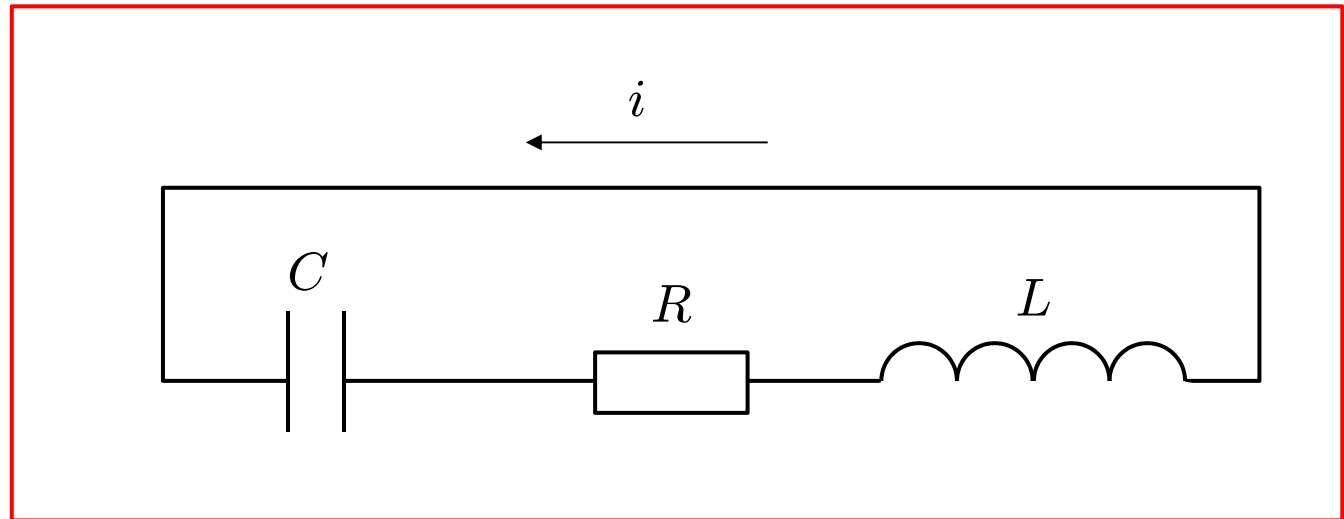
- ▶ 直列回路 (インピーダンスの見方)

$$Li + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = 0$$



$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$I = \int_0^t i(\tau) d\tau$$



# 単振り子系

- ▶ 微分方程式 (エネルギー保存則により**周期振動**する)

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

ただし、

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \theta \text{が小さいとき} (\sin \theta \approx \theta) \text{の角周波数}$$

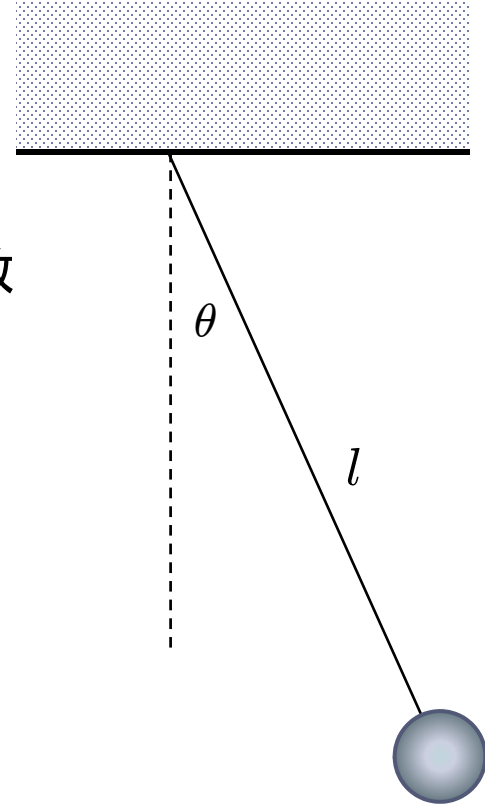
- ▶ 厳密解

$$\theta = 2 \sin^{-1}(k \operatorname{sn}(\omega(t - \phi), k)), \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

ただし、 $\operatorname{sn}(a, k)$  はヤコビの楕円関数、

$\theta_0$  は振り子の最大振幅。

- ▶ 周期  $T = 4K(k)/\omega$  ( $K(k)$ は第1種完全楕円積分)
  - ✓ 振幅が小さければ単振動の場合  $T = 2\pi/\omega$  と同じ
  - ✓ 「振り子の等時性」は大きい振幅では崩れる

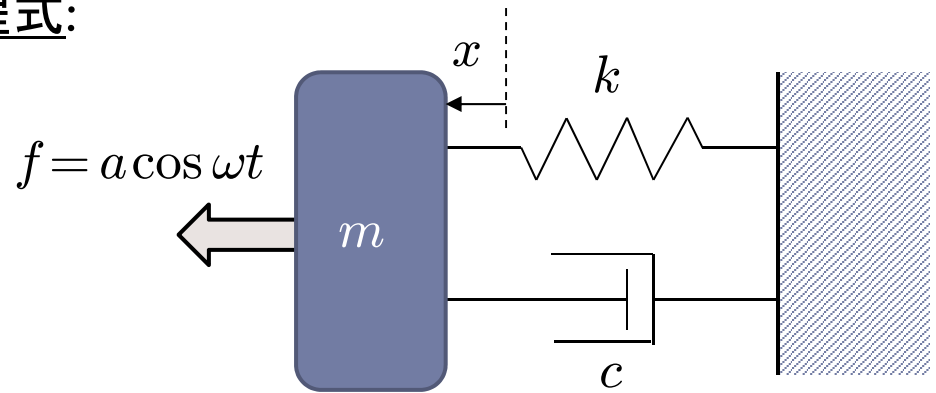


# 強制振動とは

- ▶ 外力を振動させた場合の運動方程式:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a \cos \omega t$$

- ▶  $a$  が外力の振幅を表す。
- ▶ 一般解 (実数固有値をもつ場合):



自由振動の一般解

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + A \cos(\omega t - \phi) \rightarrow \text{定常振動解}$$

$$A = \frac{a}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2}}, \quad \phi = \arg(k - m\omega^2, c\omega)$$

定常振動の振幅(Amplitude)

位相遅れ(Phase delay; Phase lag)

- ▶ 「自由振動の一般解」の部分の未定係数は外力項の影響を受ける。
- ▶ このように、一般解が自由振動解と定常振動解の「和」になるのは、「線形微分方程式」だからである。単振り子のように非線形の場合は、厳密には一般解が「和」にならない。

# 強制振動の解を簡単に求める

- ▶ 強制振動の解を求めるにはラプラス変換(Laplace transform)を用いる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a \cos \omega t$$

↓

$$m[s\{sX(s) - x(0)\} - \dot{x}(0)] + c(sX(s) - x(0)) + kX(s) = a \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

ただし、 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ 。

- ▶ 公式:  $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\mathcal{L}[x(t)] - x(+0)$

- ▶  $X(s)$ について解く

定常振動  
(Stationary vibration)

$$X(s) = \left[ \frac{(mx(0) + p_1)s + (m\dot{x}(0) + cx(0) + p_0)}{ms^2 + cs + k} \right] + \frac{q_1 s + q_0}{s^2 + \omega^2}$$
$$\begin{cases} p_1 = \frac{am(m\omega^2 - k)}{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2} \\ p_0 = \frac{-ack}{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2}, \end{cases} \begin{cases} q_1 = \frac{-a(m\omega^2 - k)}{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2}, \\ q_0 = \frac{ac\omega^2}{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2} \end{cases}$$

# 定常振動項だけに着目

- ▶ 伝達関数 $G(s)$ に  $\cos \omega t$  を入力した場合の定常振動項のラプラス変換は、

$$X(s) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \operatorname{Im}[G(j\omega)] \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- ▶ 時間領域で書くと、

$$x(t) = \boxed{\|G(j\omega)\|} \cos(\omega t + \boxed{\varphi}), \quad \varphi = \arg[G(j\omega)]$$

ゲイン(Gain)

位相進み (Phase lead; 負なら位相が遅れている)

- ▶  $a = 1$ とした場合の前ページの結果もそうになっている。

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{-c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

# 余談

---

- ▶ いつも伝達関数に  $s = j\omega$  を代入して考えればよいわけではない。
- ▶ 伝達関数に  $s = j\omega$  を代入するケースは以下の2つ。
- 周波数応答(frequency response)を調べる場合（今回の場合）
  - ✓ 正弦波振動を加えたときに定常的に残る振動を調べる。
  - ✓  $s = j\omega$  を代入することで、**過渡応答を無視**している。
  - ✓ 伝達関数が**安定であることを仮定**している
  - ✓ 電気回路が交流電圧源により励起されている場合の定常状態を調べるのも、この場合に相当する。過渡応答を調べるのには使えない。
  - ✓ 伝達関数はインパルス応答の収束域だけを定義域とする。
- ナイキストの安定判別法(Nyquist stability criterion)を使う場合
  - ✓ ナイキスト線図(Nyquist plot)を描くために  $s = j\omega$  を代入する。
  - ✓ 伝達関数は解析接続されていて極を除く複素平面上で定義される。
- ▶ Bode線図は上記の2つの両方の目的で使われる。

# ゲイン線図

- ▶ 横軸(対数軸)が角周波数  $\omega$
- ▶ 縦軸はゲインをdb表記 ( $20\log_{10}\|G(j\omega)\|$ )したもの
- ▶ (ゲイン線図) + (位相線図) がBode線図
- ▶ 強制振動の場合のゲイン

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\|G(j\omega)\| = \frac{1}{m\sqrt{\omega^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4}}$$

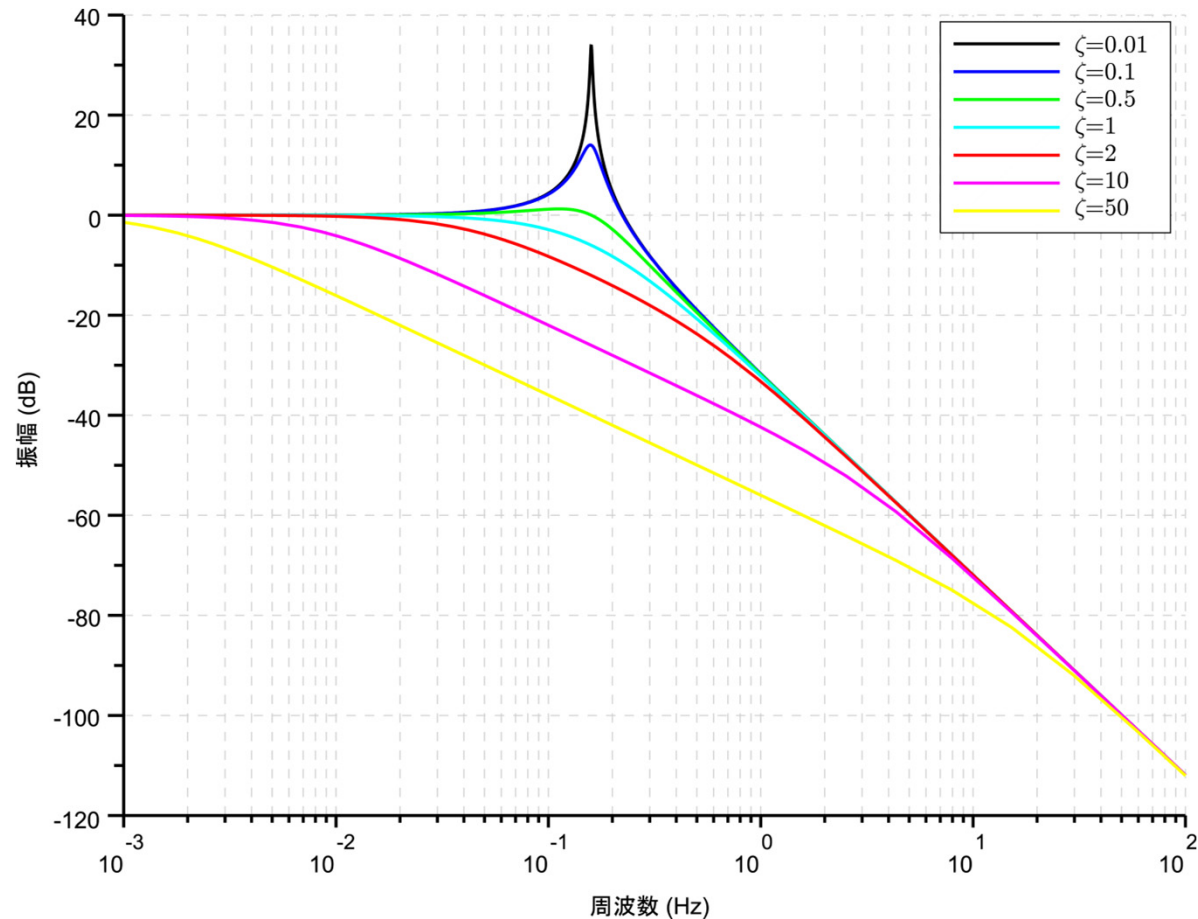
- ▶  $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$  ならば、 $\|G(j\omega)\|$  は  $\omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$  にて最大値

$$\|G(j\omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2})\| = \frac{1}{4m\omega_n^4\zeta^2(1 - \zeta^2)}$$

をもつ

# 強制振動系のゲイン線図(1)

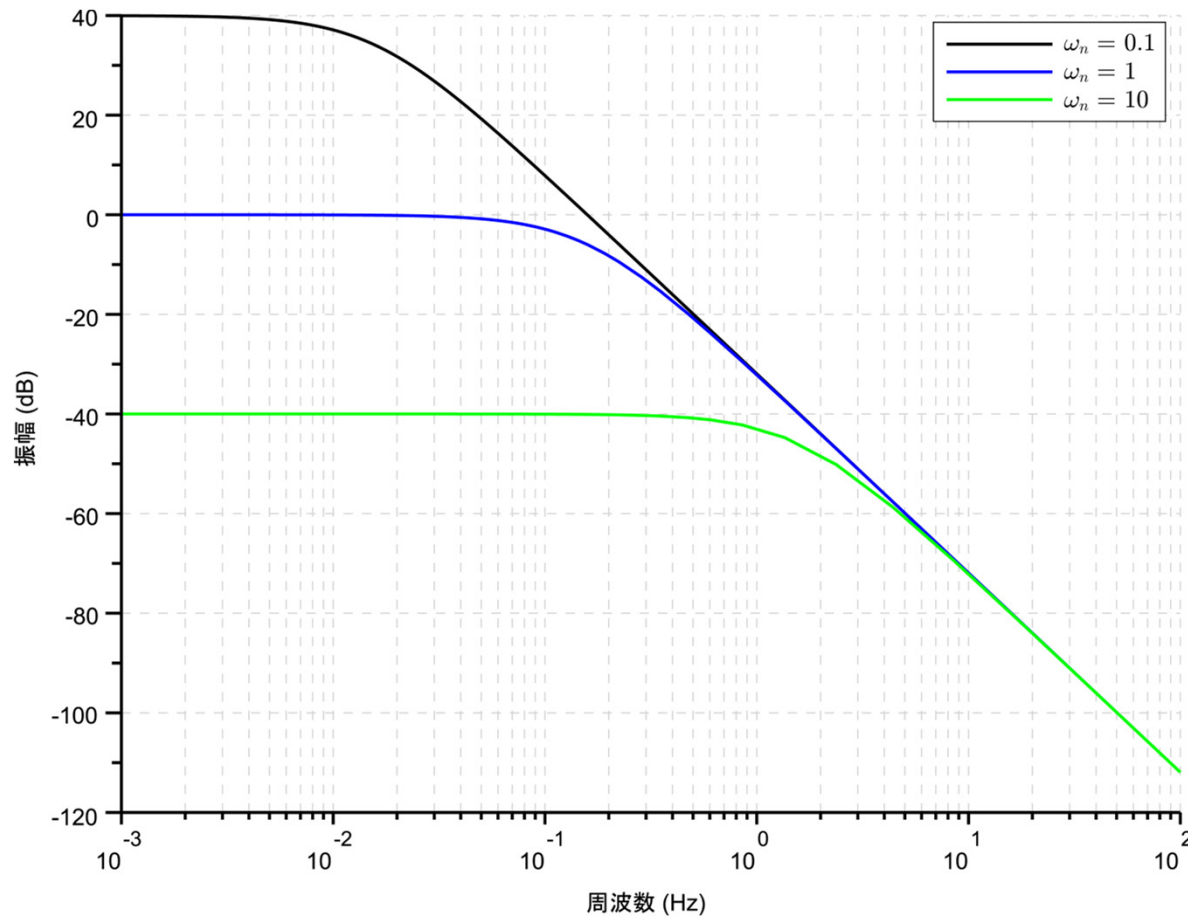
- ▶  $m$ と $\omega_n$ は固定。 $\zeta$ を変化させる。
- ▶  $\zeta$ : 大  $\rightarrow$  振幅減少。特に小さい $\zeta$ は「共振」を起こす。





# 強制振動系のゲイン線図(2)

- ▶  $m$  と  $\zeta$  を固定。 $\omega_n$  を変化させる。
- ▶  $\omega_n$  が大  $\Rightarrow$  ゲイン線図が右下に平行移動。(  $\omega_n$  が大きいほうが振動を抑制。)



# 基台への力の伝達

- ▶ 「おもりに加わる外力」から「基台に伝わる力」までの伝達関数を求める。

$$\begin{cases} (ms^2 + cs + k)X(s) = U(s) \\ Y(s) = (cs + k)X(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ▶ 力の伝達のゲイン  $\Rightarrow$  **力伝達率**

$$\|G_F(j\omega)\| = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 p^2}{(1 - p^2)^2 + 4\zeta^2 p^2}}$$

ただし、 $p = \omega/\omega_n$

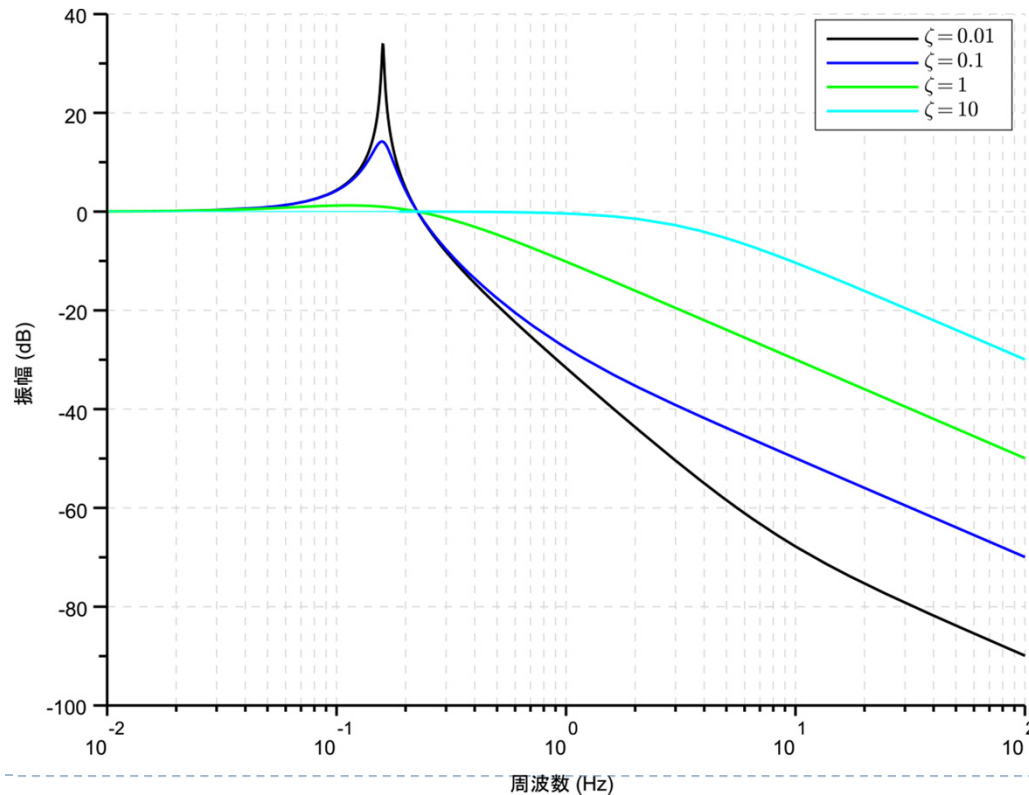
- ▶  $p = 1$  ならば、力伝達率は必ず1以上。

$\Rightarrow$  ゲインが1より大きくなる周波数がある。

- ▶  $p = \sqrt{2}$  ならば、 $\|G_F(j\omega)\|$  は、 $\zeta$ によらずに1。 ( $\Rightarrow$  定点)

# 力の伝達率のゲイン線図

- ▶  $p = \sqrt{2}$  を境に、高周波領域では小さい  $\zeta$  が力伝達率の抑制になり、低周波領域(特に共振周波数付近)では大きい  $\zeta$  が力伝達率の抑制になる。
- ▶  $\omega_n$  が大きくなると右に平行移動 $\Rightarrow$ 共振しない場合は、 $\omega_n$  が小さいほうがと力伝達率の抑制になる。(振動抑制と逆)



# 基台が振動する場合(強制変位振動)

- ▶ 基台が通常的位置より  $z(t)$  だけ動く場合を考える。⇒入力
- ▶  $Z(s) = \mathcal{L}[z(t)]$  から  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$  までの伝達関数を求める。

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{z}) + k(x - z) = 0$$

$$\Rightarrow ms^2 X(s) + cs(X(s) - Z(s)) + k(X(s) - Z(s)) = 0$$

$$\Rightarrow G_B(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{cs + k}{s^2 + cs + k} = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

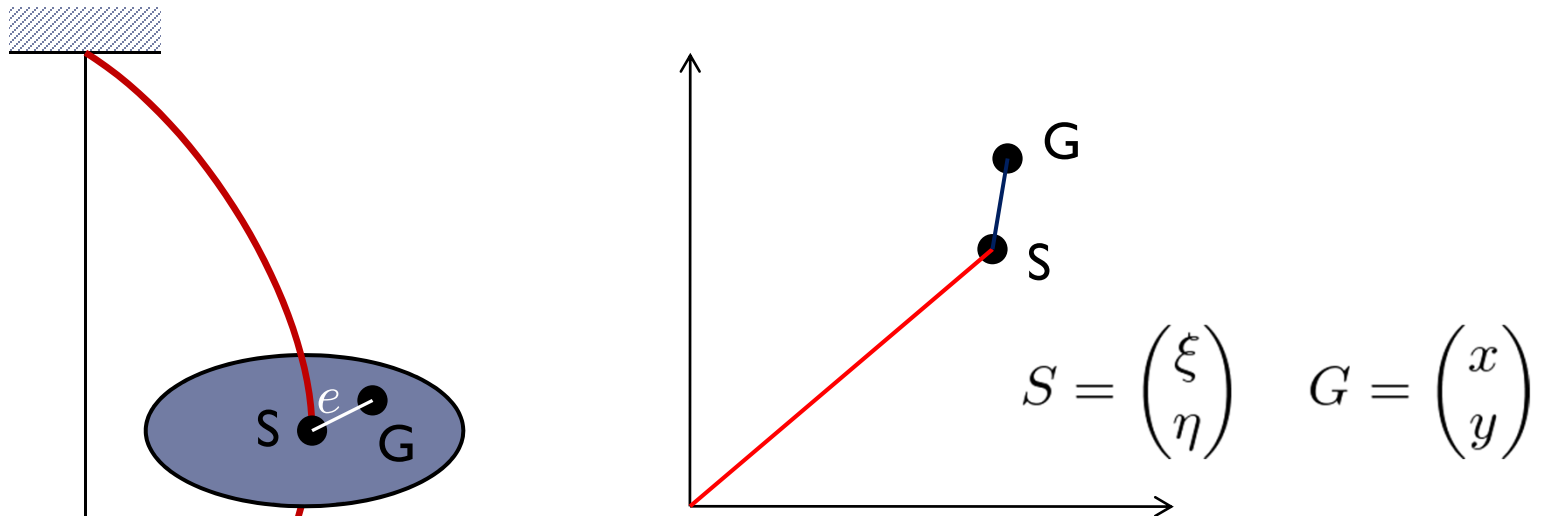
⇒力の伝達と同じ伝達関数 (双対問題)

- ▶  $z(t)$ が振動する場合のゲイン = 力伝達率と同じ
- ▶ 振動抑制のための方策

	おもりへの外力が振動	$z(t)$ が振動
$\omega_n$	大きいほうがよい	一般的に小さいほうが良い
$\zeta$	大きいほうが良い	周波数によって変わる

# 不釣り合い円盤を有する弾性軸の回転(1)

- ▶ 偏重心  $e$  を持つ円盤が回転



弾性軸の弾性係数を  $k$   
減衰係数を  $c$  とおく

入力:

$$u = G - S = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \xi \\ y - \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \cos \omega t \\ e \sin \omega t \end{pmatrix}$$

# 不釣り合い円盤を有する弾性軸の回転(2)

## ▶ 基本の運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k\xi - c\dot{\xi} \\ m\ddot{y} = -k\eta - c\dot{\eta}, \end{cases} \quad \begin{cases} x - \xi = u_x \\ y - \eta = u_y \end{cases}$$

## ▶ Gの運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{u}_x + ku_x \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{u}_y + ku_y \end{cases} \rightarrow G_G(s) = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[u_x(t)]} = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u_y(t)]}$$
$$= \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## ▶ Sの運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k\xi = -m\ddot{u}_x \\ m\ddot{\eta} + c\dot{\eta} + k\eta = -m\ddot{u}_y \end{cases} \rightarrow G_S(s) = \frac{\mathcal{L}[\xi(t)]}{\mathcal{L}[u_x(t)]} = \frac{\mathcal{L}[\eta(t)]}{\mathcal{L}[u_y(t)]}$$
$$= \frac{-ms^2}{ms^2 + cs + k} = \frac{-s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## 不釣り合い円盤を有する弾性軸の回転(3)

---

- ▶ 一般に金属内部の減衰係数は小さい
- ▶ よって、 $\omega = \omega_n$  付近で共振する。⇒危険速度
- ▶ 軸の横振動の固有振動角周波数で軸を回転させてはいけない。
- ▶  $\omega$  が大きいならば  $\|G_G(j\omega)\|$  はゼロに漸近。つまり、回転角周波数  $\omega$  が大きいときは点Gを中心にして回る(自動調心作用)。
- ▶  $\omega$  が小さいならば  $\|G_S(j\omega)\|$  はゼロに漸近。つまり、回転角周波数  $\omega$  が小さいときは点Sを中心にして回る。

# ファン・デル・ポール方程式 (1)

- ▶ ファン・デル・ポール (Van der Pol)方程式

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (\epsilon > 0)$$

- ▶ 非線形の方程式
- ▶ 粘性摩擦項:  $|x| = 1$  を境に符号反転  $\Rightarrow$  原点は不安定, 外側では振幅抑制
- ▶ 変換  $\tau = t/\sqrt{k}$ ,  $\bar{\epsilon} = \epsilon\sqrt{k}$ ,  $\bar{x} = x/\sqrt{a}$  の下では

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} - \bar{\epsilon}(1 - a\bar{x}^2)\frac{d\bar{x}}{d\tau} + k\bar{x} = 0$$

$\Rightarrow$ 元のファン・デル・ポール方程式はある意味で「標準形」

- ▶ 変換  $y = \epsilon(x - x^3/3) - \dot{x}$

変換  $z = x - x^3/3 - \dot{x}/\epsilon$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \epsilon \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \epsilon \left( x - \frac{1}{3}x^3 - z \right) \\ \dot{z} = \frac{x}{\epsilon} \end{cases}$$



# ファン・デル・ポール方程式 (2)

▶  $\epsilon$  がゼロなら角周波数1の調和振動子

$\epsilon$  が小さいときの近似解

1. 角周波数 1 で回転する座標をとる

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{u} = \epsilon \{ u \cos t - v \sin t - (1/3)(u \cos t - v \sin t)^3 \} \cos t \\ \dot{v} = -\epsilon \{ u \cos t - v \sin t - (1/3)(u \cos t - v \sin t)^3 \} \sin t \end{cases}$$

2. 右辺が小さいので  $u, v$  の変化より角周波数 1 の振動の方が速い  $\Rightarrow$  平均化(averaging)手法 (角周波数 1 の振動の項を  $0 \sim 2\pi$  で平均値をとる)

$$\begin{cases} \dot{u} = (1/8)\epsilon u \{ 4 - (u^2 + v^2) \} \\ \dot{v} = (1/8)\epsilon v \{ 4 - (u^2 + v^2) \} \end{cases}$$

3. 半径  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$  の挙動  $\Rightarrow \dot{r} = (\epsilon/8)r(4 - r^2)$

4. 半径  $r$  は2に収束  $\Rightarrow \epsilon$  が小さいとき  $x, y$  は半径2の円に収束(近似的)

# ファン・デル・ポール方程式 (3)

## ε が大きいときの近似解

- ε が大 ⇒ x に比べ z の動きが遅い

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon \left( x - \frac{1}{3}x^3 - z \right) \\ \dot{z} = \frac{x}{\epsilon} \end{cases}$$

速い動き

に着目

定数とみなす

## 平衡点の分類

$|z| > 2/3 \rightarrow$  安定な平衡点が1つ

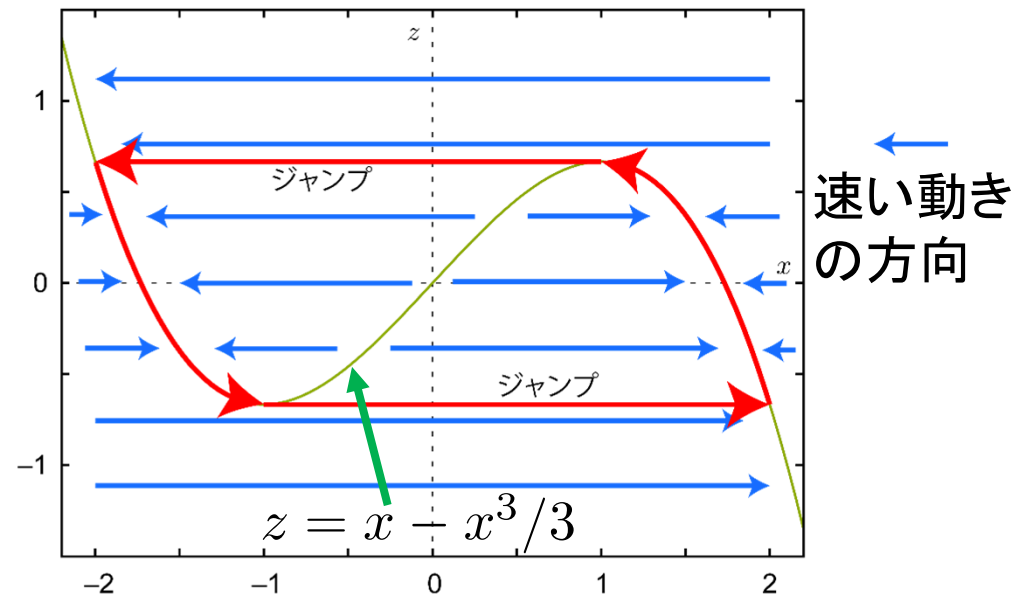
$|z| < 2/3 \rightarrow$  安定な平衡点が2つ +

不安定な平衡点が1つ

- 遅い動き  $x > 0 \rightarrow \dot{z} > 0$   
 $x < 0 \rightarrow \dot{z} < 0$

⇒ 反時計回り

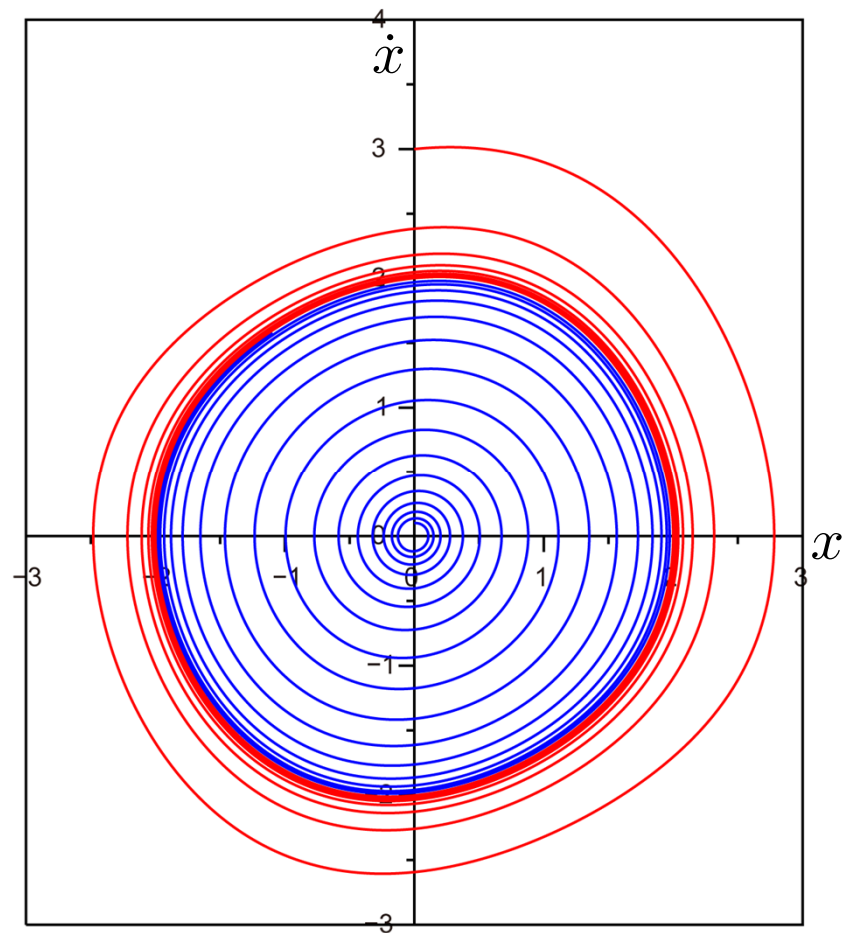
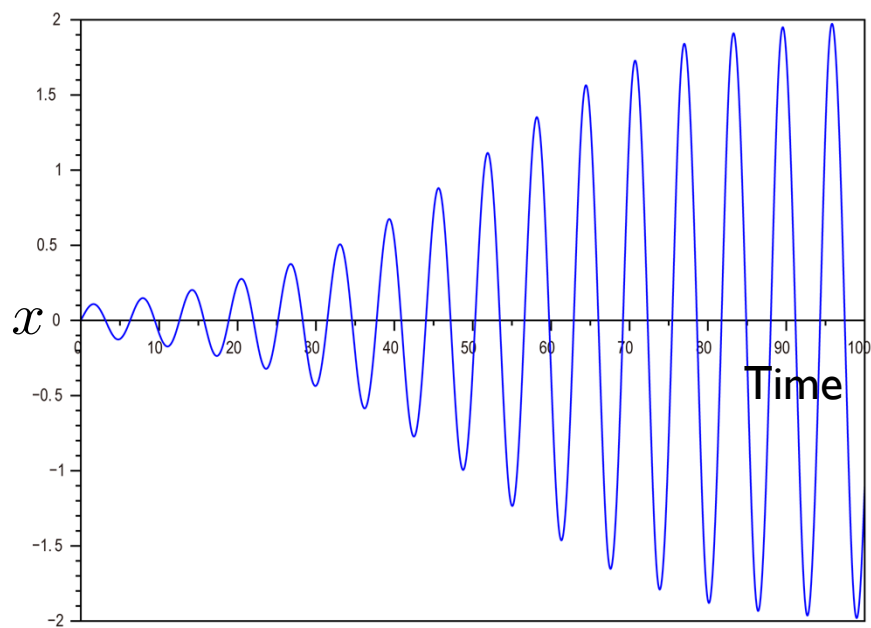
- 最終的に赤い線上を動く



速い動き  
の方向

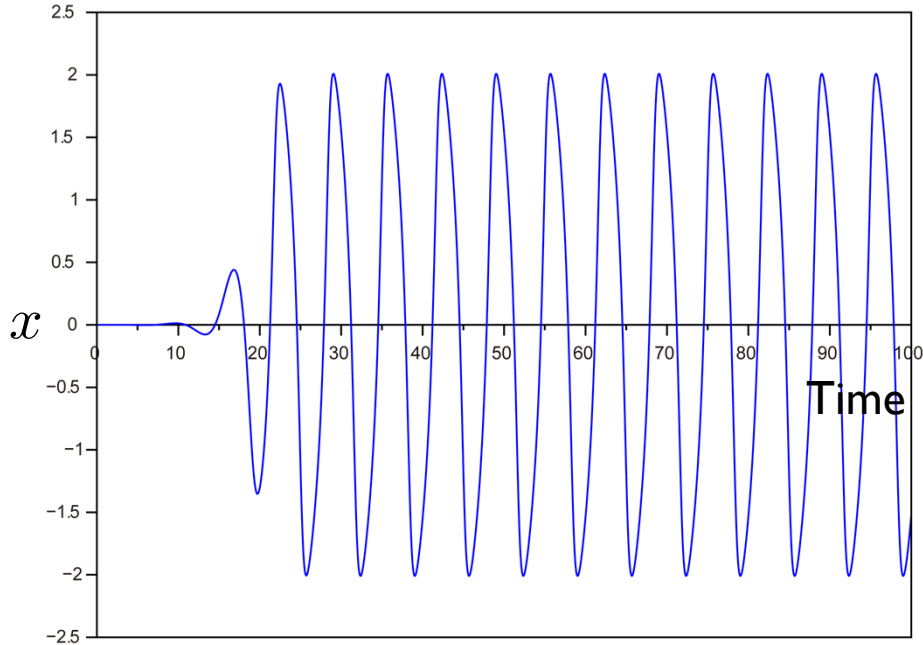
# ファン・デル・ポール方程式 (4)

▶  $\epsilon = 0.1$



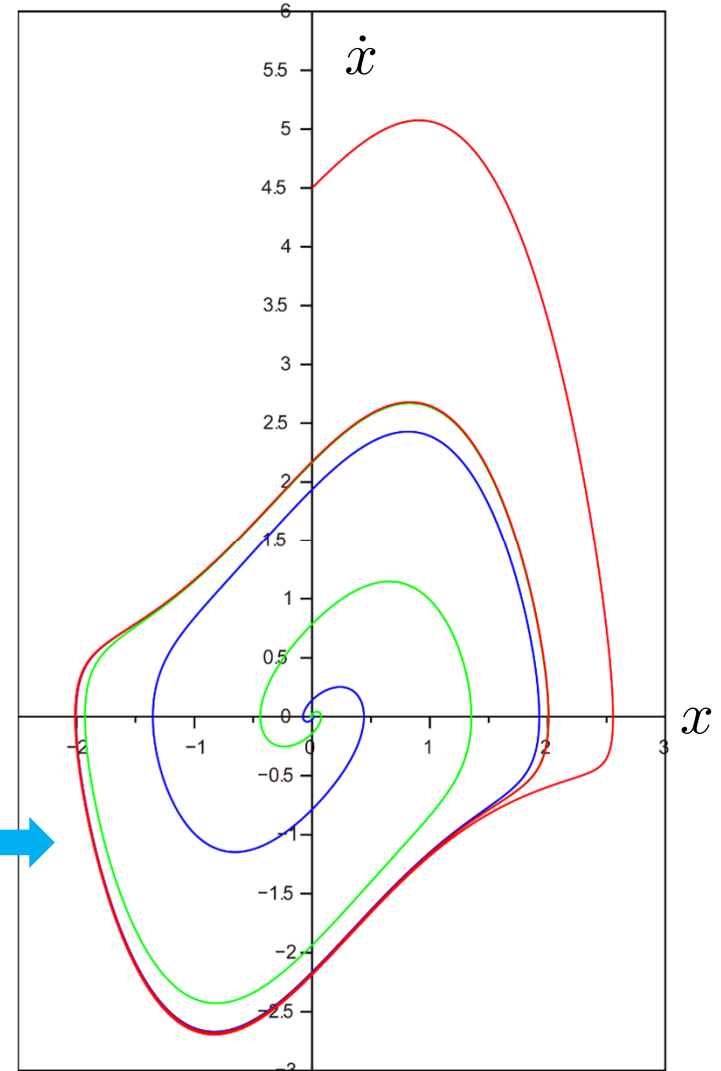
# ファン・デル・ポール方程式 (5)

▶  $\epsilon = 1$



全ての正の  $\epsilon$  において、  
ある閉軌道 ( $\epsilon$  によって異なる) に巻き付く

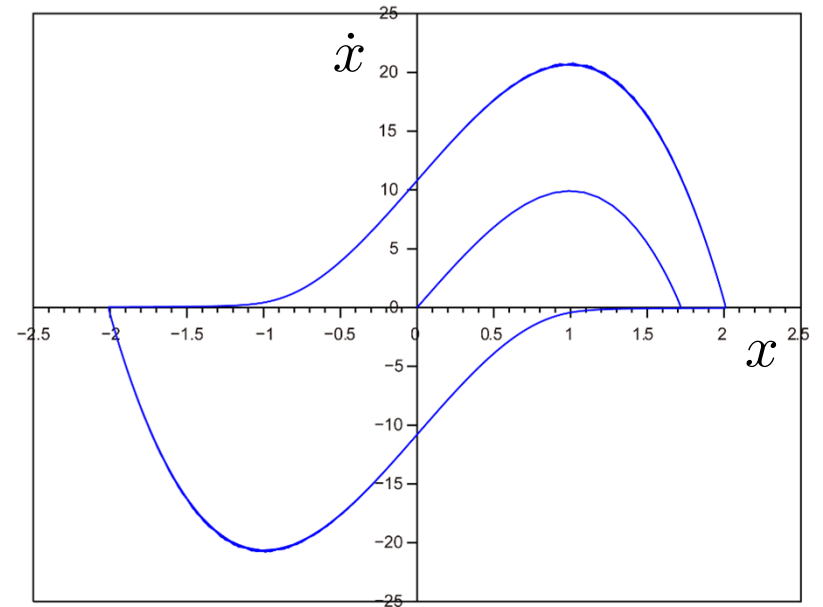
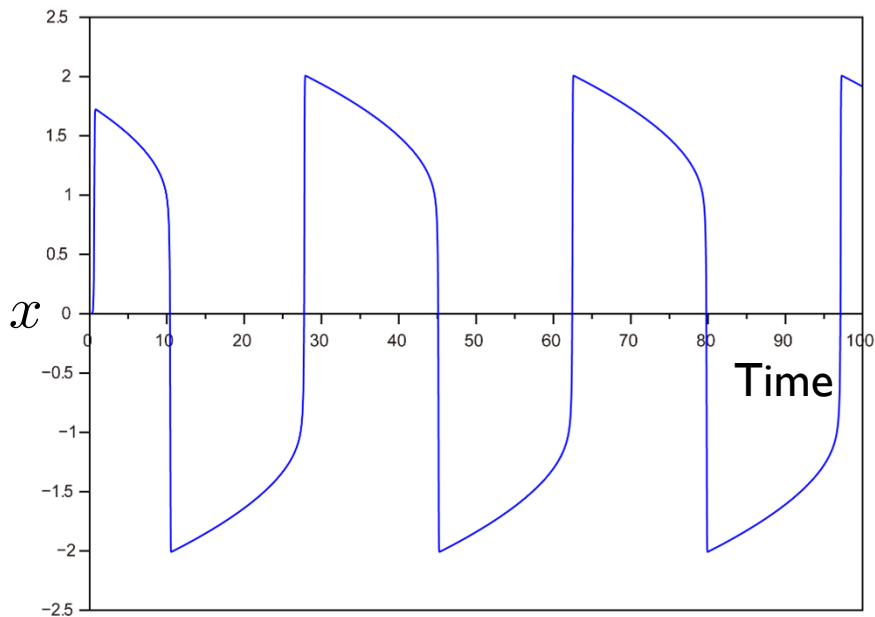
**リミット・サイクル** (Limit cycle)  
存在性: リエナール (Liénard) の定理



2020年度

# ファン・デル・ポール方程式 (6)

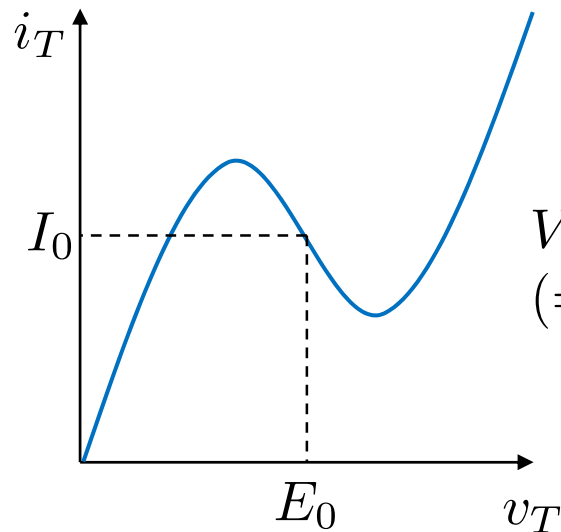
▶  $\epsilon = 15$



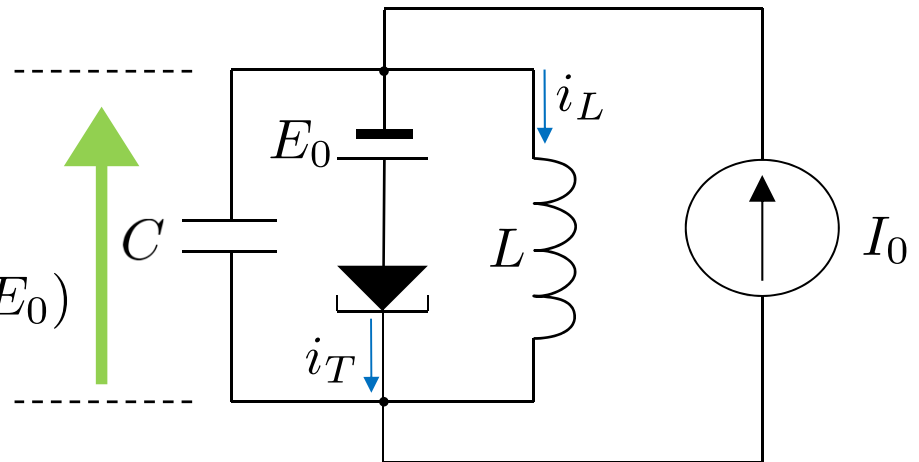
# ファン・デル・ポール方程式 (7)

- ▶ トンネルダイオードを用いた発振回路

$$i_T = \gamma(v_T - E_0)^3 - \alpha(v_T - E_0) + I_0$$



$$V (= v_T - E_0)$$



$$C\dot{V} + i_T + i_L = I_0$$

$$L\dot{i}_L = V$$



$$\ddot{V} - \frac{1}{C}(\alpha - 3\gamma V^2)\dot{V} + \frac{1}{LC}V = 0$$

# リエナールの定理 (Liénard's Theorem)

## ▶ リエナール方程式

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

のリミットサイクルの存在を示す定理

ファン・デル・ポール方程式は必ずリミットサイクルを持つ

▶ **[定理]** リエナール方程式が以下の4条件を満たすならば, 唯一の安定なリミット・サイクルを持つ.

1.  $f(x)$  は連続な偶関数

2.  $g(x)$  は連続な奇関数.

3.  $x$  と  $g(x)$  の符号が一致

4. 正定数  $a$  が存在し,  $F(x) = \int_0^x f(s) ds$  が次のような性質を満たす

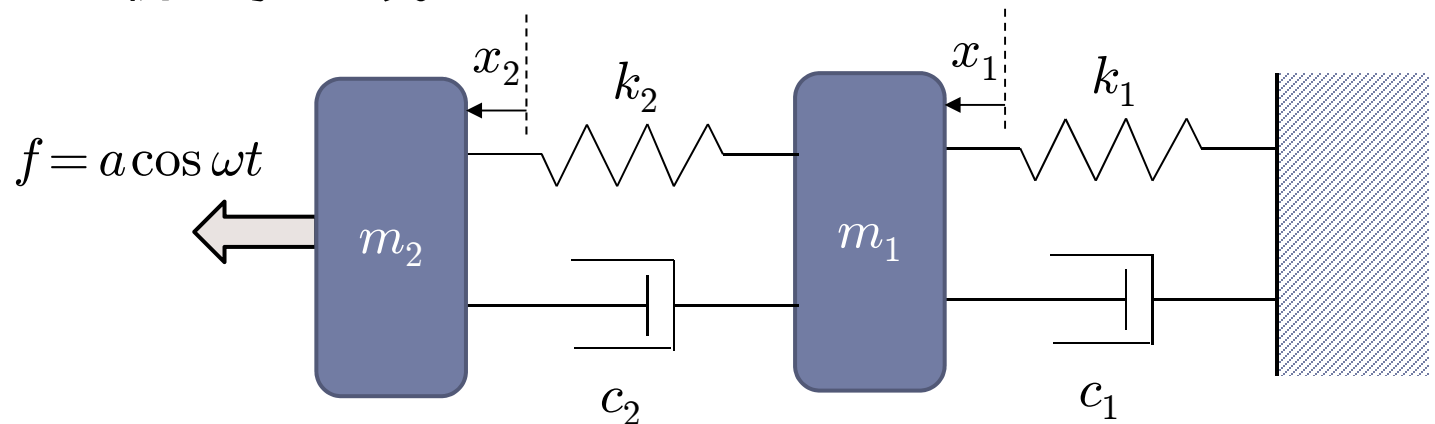
$$F(x) < 0 \quad (0 < x < a)$$

$$F(a) = 0$$

$$F(x) > 0 \text{ and } f(x) \geq 0 \quad (x > a)$$

# 連成振動(1)

- ▶ 連成振動(coupled vibration; coupled oscillation) = 2自由度以上の振動
- ▶ たとえば、以下の例で考えよう。



$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = f$$



## 連成振動(2)

---

▶ 伝達関数

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{c_2 s + k_2}{D(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2}{D(s)}$$

$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (c_2 m_1 + (c_1 + c_2)m_2)s^3 \\ + (c_1 c_2 + k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2)s^2 + (c_2 k_1 + c_1 k_2)s + k_1 k_2$$

# 連成振動(3)

---

- ▶ 連成振動を正確に理解するには、状態空間で考える必要がある。
- ▶ たとえば、ここでの例では以下のようなになる。
- ▶ 運動方程式

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{b}f$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ 状態方程式

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T)^T$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}'f = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ M^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} f$$

# モード解析(1)

- ▶ 外力  $f=0$  として考える。また、非減衰の場合  $C=0$  を考える。
- ▶ 行列  $A$  の固有値と固有ベクトルが重要
- ▶ この場合、行列  $A$  は純虚数の固有値しか持たない。

[簡単な証明]  $M^{-1}K$  の固有値すなわち  $M^{-1/2}KM^{-1/2}$  の固有値を  $\ell_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とすると、 $\ell_i$  は正である。このとき、行列  $A$  の固有値は、 $\pm j\omega_i$  ( $\omega_i = \sqrt{\ell_i}$ ) となる。

- ▶  $M^{-1}K$  の固有ベクトルを  $p_i$  (長さ1に正規化) とすると、 $A$  の固有ベクトルは、

$$z_{2i-1} = \begin{pmatrix} p_i \\ j\omega_i p_i \end{pmatrix}, \quad z_{2i} = \begin{pmatrix} p_i \\ -j\omega_i p_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

- ▶ つまり、 $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の  $n$  個の方向の振動に分解できる。

# モード解析(2)

## ▶ 座標変換

$$w = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & p_2 & 0 & \cdots & p_n & 0 \\ 0 & \omega_1 p_1 & 0 & \omega_2 p_2 & \cdots & 0 & \omega_n p_n \end{bmatrix}^{-1} z$$

## ▶ モード分解されたシステム ( $n$ 個の調和振動子に分解)

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Omega_n \end{bmatrix} w$$
$$\Omega_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

元の座標で表現した解

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \cos(\omega_i t + \phi_i) p_i$$

$$\dot{x} = - \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \sin(\omega_i t + \phi_i) p_i$$

# 偏微分方程式で表現されるシステム

- ▶ これから、偏微分方程式で表現されるシステムに関して学びます。
- ▶ 偏微分方程式は**無限次元系**.
  - ⇒ 多自由度系の**次元数が無限大**の場合に相当。
- ▶ 主に扱うのは、ニュートンの運動方程式に支配される対象
- ▶ 特に無減衰系 (説明の簡単化のため⇒減衰ありでも殆ど同じ)
- ▶ 無減衰**有限**次元系の解 (成分ごとの表現) ⇒ 各モードの解の和

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n a_i p_{i,j} \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top, \quad \mathbf{p}_i = (p_{i,1}, \dots, p_{i,n})^\top \quad (i = 1, \dots, n)$$

- ▶ 無減衰**無限**次元系(離散スペクトルを持つ系)の解

**モード数が無限大で、固有ベクトルの代わりに関数**

$$u(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p(\xi) \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

モード毎に見れば**変数分離**

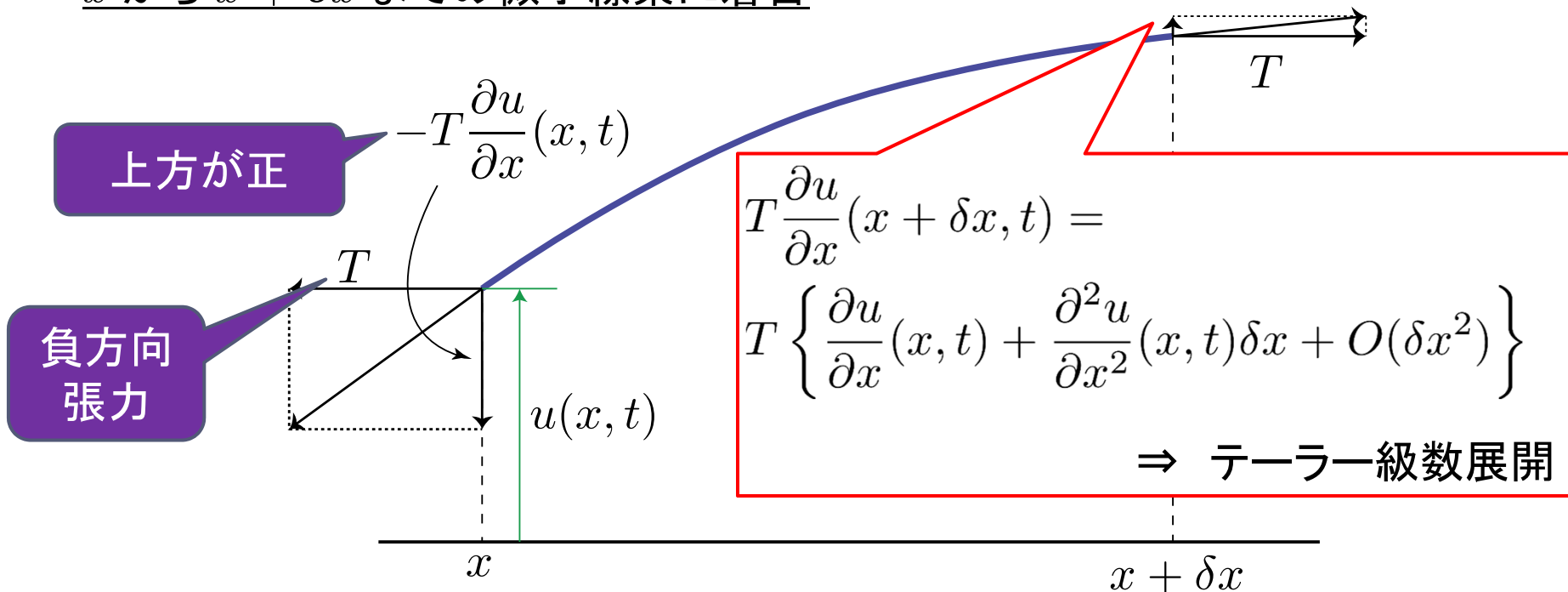
# 弦の振動方程式 (1)

弦(string)の運動方程式を求める。

- ▶ 張力:  $T$ , 線密度:  $\rho$  とする。
- ▶ 弦の場所を示すパラメータ:  $x$ , 時刻を表すパラメータ:  $t$
- ▶ 場所  $x$ , 時刻  $t$  における弦の(横方向の)変位:  $u(x, t)$

これが変数!  
これを求める

$x$  から  $x + \delta x$  までの微小線素に着目



## 弦の振動方程式 (2)

- ▶ 微小線素の質量:  $\rho \delta x$
- ▶ 振幅方向の力:  $T \delta x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O(\delta x) \right\}$
- ▶ ニュートンの運動方程式:  $\rho \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T \delta x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O(\delta x) \right\}$

両辺を  $\delta x$  で割って、 $\delta x \rightarrow 0$

### 弦の波動方程式 (Wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right)$$

⇒ 偏微分方程式 (partial differential equation; PDE)

# なぜ波動方程式とよばれるのか

- ▶ 方程式 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right)$$
- ▶ 一般解 
$$u(x, t) = u_{\text{fwd}}(x - ct) + u_{\text{back}}(x + ct)$$

⇒ 代入すると両辺が  $c^2 \{u''_{\text{fwd}}(x - ct) + u''_{\text{back}}(x + ct)\}$  で一致
- ▶ **進行波** (Traveling wave)  $u_{\text{fwd}}(x - ct)$  : 速さ  $c$  で正の方向に進む
- ▶ **後退波** (Backward wave)  $u_{\text{back}}(x + ct)$  : 速さ  $c$  で負の方向に進む

## 波の動きを表現する方程式 ⇒ 波動方程式

- ▶ 境界条件と初期条件で、関数  $u_{\text{fwd}}(\dots)$  および  $u_{\text{back}}(\dots)$  が決まる。
- ▶ 境界条件によっては、進行波と後退波の重ね合わせで**定在波**(Standing wave)ができる。[例]  $\cos(x - ct) + \cos(x + ct) = 2 \cos x \cos ct$



# 弦の振動の境界条件と変数分離

▶ ギターの弦のように、両端が固定されてる長さ  $L$  の弦を考える。

両端固定の境界条件 (boundary conditions)

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (\text{for all } t)$$

変数分離された解を仮定  $\Rightarrow$  一つのモードだけを考える

$$u(x, t) = \Xi(x)W(t)$$

代入:

$$\begin{cases} \frac{c^2}{\Xi(x)} \cdot \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x^2} = \frac{1}{W(t)} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -E \text{ (const.)}, \\ \Xi(0) = 0, \quad \Xi(L) = 0 \end{cases}$$

左辺は  $x$  右辺は  $t$  の関数で  
恒等的に等しい  $\Rightarrow$  定数以外ありえない

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Xi(x)}{\partial x^2} + \frac{E}{c^2} \Xi(x) = 0 \\ \Xi(0) = 0, \quad \Xi(L) = 0 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} + EW(t) = 0 \end{cases}$$

# 弦の振動の解を求める (1)

- ▶  $E < 0$  と仮定し、 $\Xi(x)$ に関する解を求める

$$\Xi(x) = A_{ch} \cosh(\sqrt{-E}x/c) + A_{sh} \sinh(\sqrt{-E}x/c)$$

境界条件  $\Xi(0) = \Xi(L) = 0$  を満たす解は恒等的にゼロな解のみ  $\Rightarrow$  不適

- ▶  $E = 0$  のときも不適であることは、同様に示すことができる。

$E > 0$  の場合のみ意味のある解が存在

- ▶  $\omega = \sqrt{E}$  とおくと、解は 
$$\begin{cases} \Xi(x) = A_c \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + A_s \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \\ W(t) = A_w \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

- ▶ 境界条件  $\Xi(0) = 0$  より  $A_c = 0$

- ▶ 境界条件  $\Xi(L) = 0$  より

$$\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \quad \longrightarrow$$

**固有角振動数** (固有角周波数;  
natural angular frequency;  
angular eigenfrequency)

$$\omega = \frac{c\pi}{L}i = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{\pi i}{L} \quad (i \in \mathbb{N})$$

## 弦の振動の解を求める (2)

- ▶ 単一モード解 (基準モード)

$$u(x, t) = A \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{c\pi}{L}i = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{\pi i}{L} \quad (i \in \mathbb{N})$$

基準モードは  
無限個ある

ここで、 $A = A_s A_w$  とおいた。

- ▶ 基本振動(fundamental vibration)の角周波数

$$\omega_1 = \frac{c\pi}{L} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{\pi}{L}$$

張力が大きいほど、線密度が軽い(同一材料なら細い)ほど、弦が短いほど、基本振動数は高くなる。

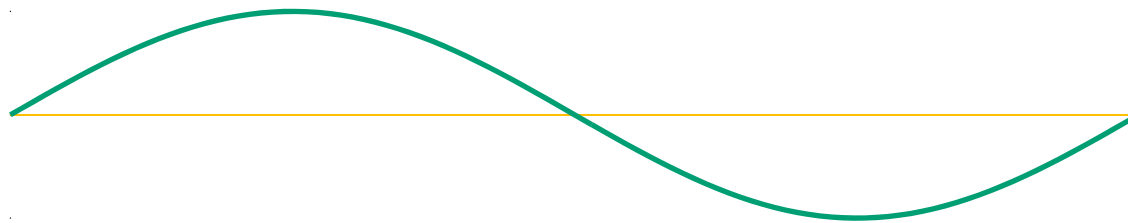
- ▶ 固有角振動数は基本振動角振動数の自然数倍  $\omega_i = i\omega_1, \quad i = 1, 2, \dots$

# 弦の基準モード

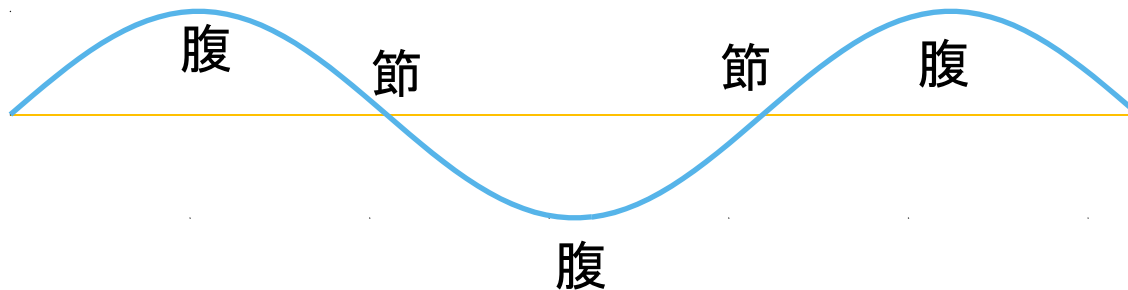
## ▶ 基準モードの波形



$i = 1$  (基準振動)



$i = 2$  (2倍振動)



$i = 3$  (3倍振動)

節: node  
腹: anti-node

# 吊り下げた鎖の振動 (1)

- ▶ 吊り下げた鎖 (右図)
- ▶ 張力が場所によって異なる (下端では張力ゼロ)
- ▶ 張力と質量が線密度に比例するので、方程式は線密度によらない。
- ▶ 吊り下げた鎖の振動の方程式

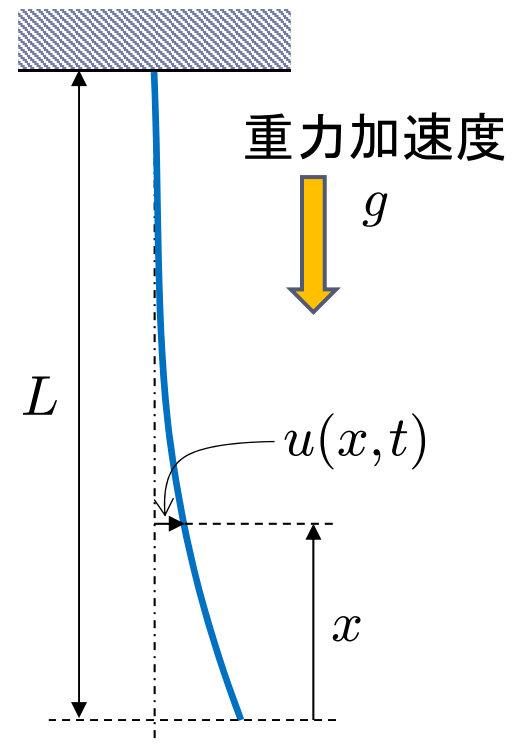
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = g \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

- ▶ 境界条件

$$u(L, t) = 0 \quad (\text{for all } t)$$

- ▶ 変数分離  $u(x, t) = \Xi(x)W(t)$

$$\begin{cases} x \frac{\partial^2 \Xi(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial \Xi(x)}{\partial x} + \frac{\omega^2}{g} \Xi(x) = 0 \\ \Xi(L) = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} + \omega^2 W(t) = 0$$




## 吊り下げた鎖の振動 (2)

▶ パラメータ変換:  $x = (g/4) (\xi/\omega)^2$

▶ 0次ベッセル(Bessel)微分方程式

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} + \Xi = 0$$

一般解 

(原点で発散しない条件より  
Neumann関数は不適)

$$\Xi = A_x J_0(\xi) = A_x J_0 \left( 2\omega \sqrt{\frac{x}{g}} \right)$$

$J_0(\ )$ : 0次の第1種ベッセル関数

▶ 境界条件  $\Rightarrow$  固有角振動数を求める方程式

$$J_0 \left( 2\omega \sqrt{\frac{L}{g}} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (\lambda : 0\text{次ベッセル関数のゼロ点})$$

$\lambda = 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915, \dots$

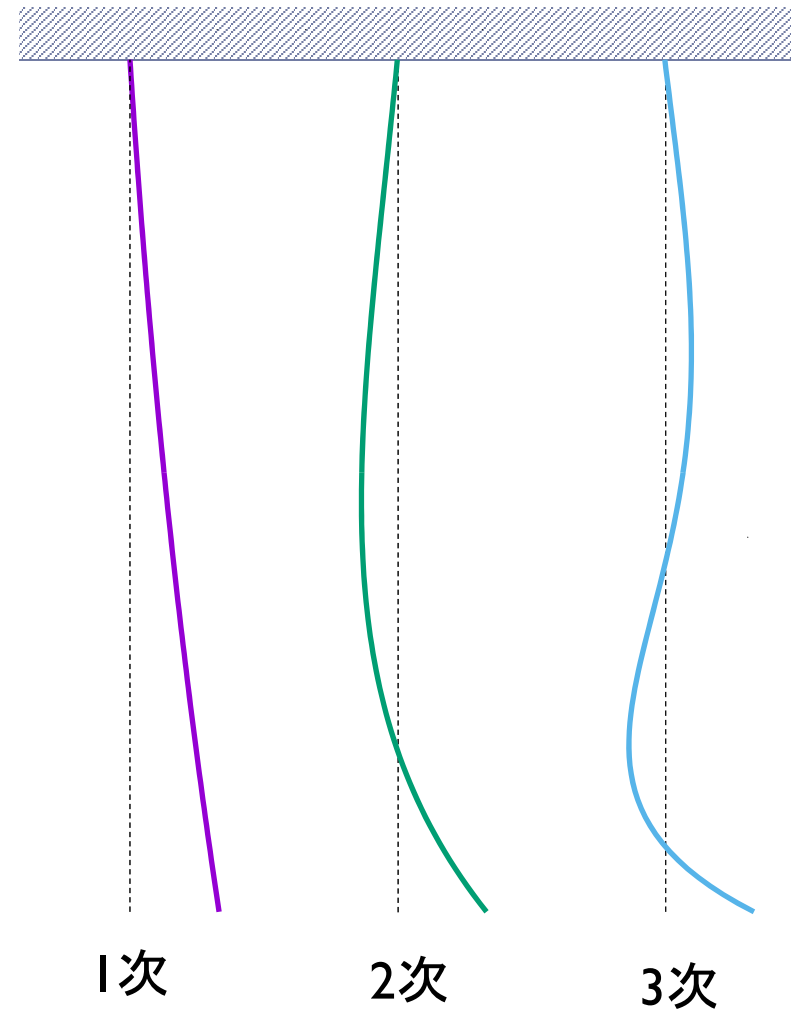
▶ 最終的な基準モード

$$u(x, t) = A_i J_0 \left( 2\omega_i \sqrt{\frac{x}{g}} \right) \cos(\omega_i t + \varphi), \quad \omega_i = \frac{\lambda_i}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

( $\lambda_i$ : 0次ベッセル関数の  $i$  番目のゼロ点)

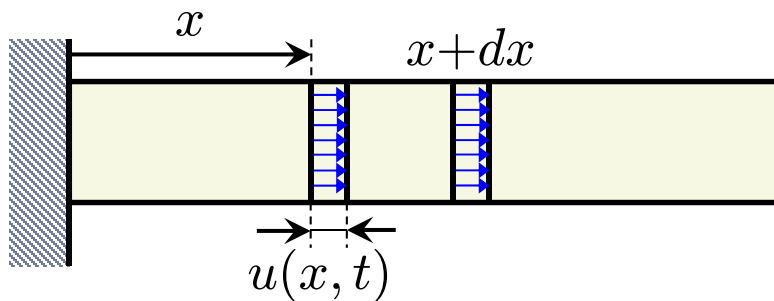
# 吊り下げた鎖の振動 (3)

- ▶ 吊り下げた鎖における基準モードの波形
- ▶ 0次の第一種ベッセル関数と平方根で表現できる



# 棒を伝わる縦波

- ▶ 棒を伝わる縦波 (Longitudinal wave)



$x$  の位置の歪み(引っ張り):  $\frac{\partial u}{\partial x}$

$x + dx$  の位置の歪み:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)dx + O(dx^2)$$

$x$  の位置の断面が  $x + u(x, t)$  に変位  
 $\Rightarrow u(x, t)$  は変位置量

- ▶ 縦波の波動方程式 ( $E$ : ヤング率,  $\rho$ : 密度,  $S$ : 断面積)

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + O(dx^2)$$

- ▶ 両辺を  $dx$  で割って  $dx \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$$

右端からの力と左端からの力で方向が逆

弦の波動方程式と同じ



# 縦波の境界条件

## ▶ 固定端



$$u(t, x_0) = 0 \quad (x_0: \text{Specified position})$$

(気柱の場合)



## ▶ 自由端



$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = 0 \quad (x_0: \text{Specified position})$$

(気柱の場合  
= 開口端)

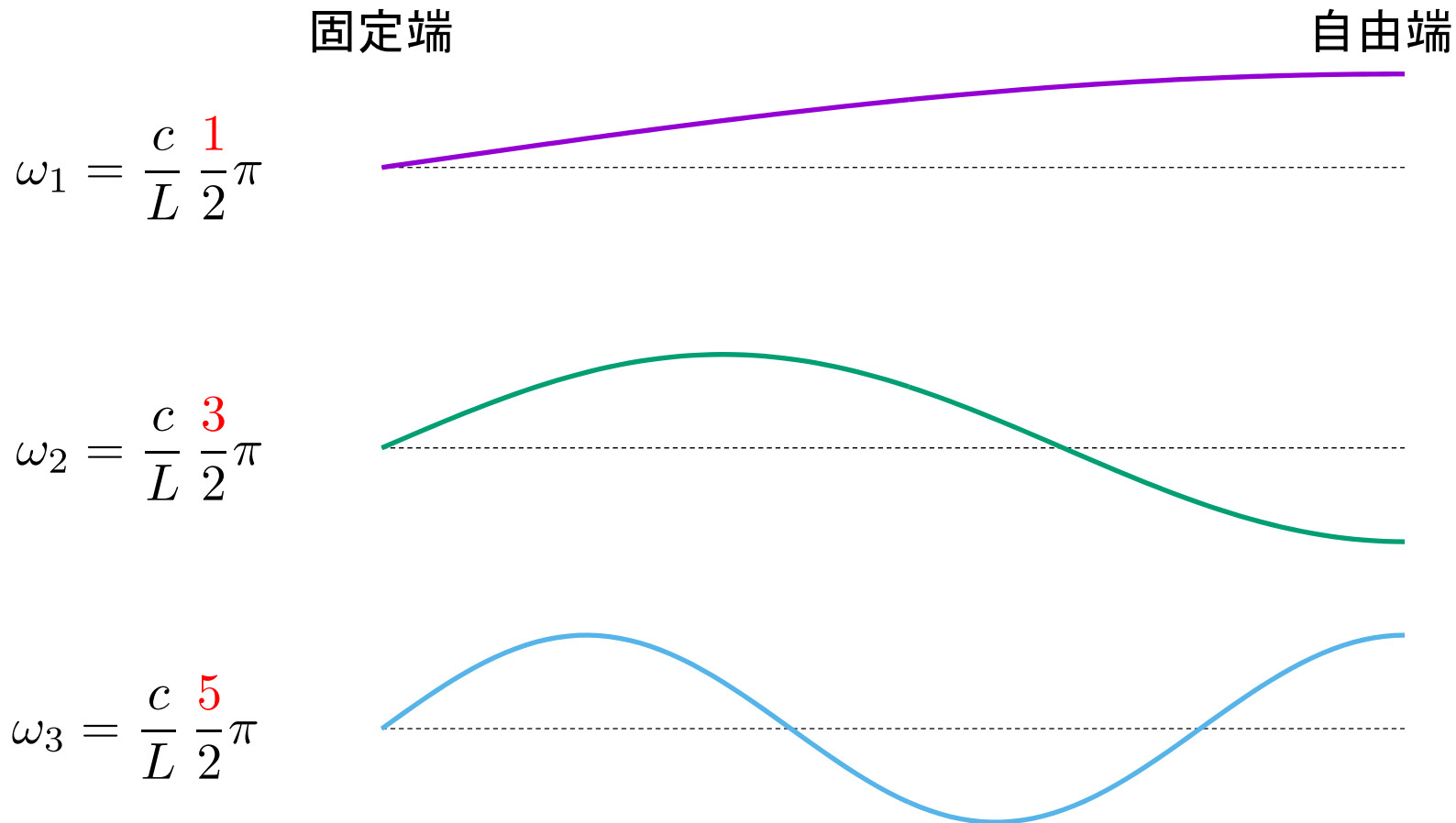


本当は開口端補正が必要

- ▶ 気柱の場合は、変位波と考えた場合。密度波と考えた場合は境界条件が入れ替わる。

# 固定端・自由端のときの固有振動波形

- ▶ 左固定端、右自由端の場合の固有振動(基準モード)波形

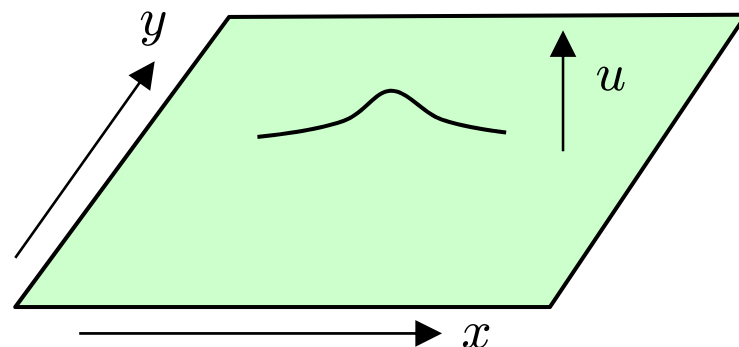


# 膜の振動

▶ 膜の振動は弦の振動の2次元版

▶ 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \left( c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right)$$



$T$ : 表面張力 (次元は力÷長さ),  $\rho$ : 面密度

▶  $\nabla$ を使った表現

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

$\nabla$ の定義(3次元版が普通だがここでは2次元)

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ラプラス(Laplace)作用素

# 長方形膜の振動 (1)

- ▶ 長方形膜 :  $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$
- ▶ 境界条件 :  $u(0, y, t) = 0, u(L_x, y, t) = 0, u(x, 0, t) = 0, u(x, L_y, t) = 0$   
⇒ 長方形の各辺上でゼロ
- ▶ 単一モード解の変数分離

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)W(t)$$

- ▶ 代入して整理

$$\frac{1}{W(t)} \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{c^2}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

⇒ 左辺は  $t$  のみ、右辺第1項は  $x$  だけ、右辺第2項は  $y$  だけの関数

⇒ それぞれ恒等的に定数

$$\frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\mu_x - \mu_y, \quad \begin{cases} \frac{c^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu_x \\ \frac{c^2}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\mu_y \end{cases}$$

## 長方形膜の振動 (2)

---

▶ 分解された方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\mu_x}{c^2} X = 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\mu_y}{c^2} Y = 0, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + (\mu_x + \mu_y) W = 0$$

弦の場合と同様に負の  $\mu_x, \mu_y$  は不適

▶ 境界条件を考えると

$$X(x) = A_x \sin(a_x x), \quad Y(y) = A_y \sin(a_y y)$$

$$a_x = i_x \frac{\pi}{L_x} \quad (i_x = 1, 2, \dots), \quad a_y = i_y \frac{\pi}{L_y} \quad (i_y = 1, 2, \dots)$$

$$W(t) = \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = c \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

## 長方形膜の振動 (3)

---

- ▶ 長方形膜の振動の解

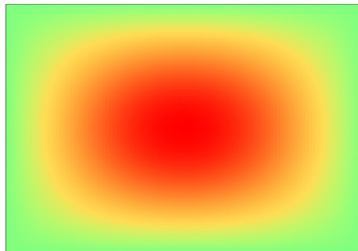
$$u(x, y, t) = \sum_{i_x=1}^{\infty} \sum_{i_y=1}^{\infty} A_{i_x, i_y} \sin\left(\frac{i_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{i_y \pi}{L_y} y\right) \cdot \cos\left(c\pi \sqrt{\frac{i_x^2}{L_x^2} + \frac{i_y^2}{L_y^2}} t + \varphi_{i_x, i_y}\right)$$

- ▶  $L_y \rightarrow \infty$  のとき、弦の振動の式になる
- ▶ 固有角振動数は  $x$  と  $y$  の両方の波の数に依存

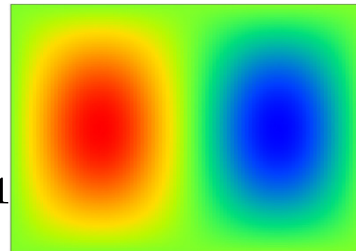
# 長方形膜の振動 (3)

▶ さまざまな振動モード(縦/横 = 2/3のとき)

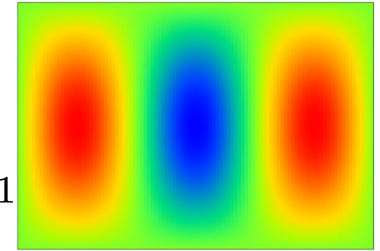
$$\omega_{1,1}$$



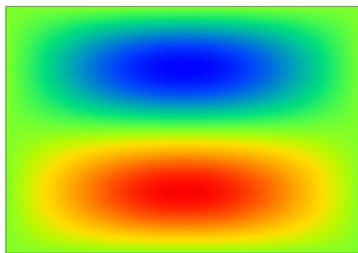
$$\omega_{2,1} = 1.39\omega_{1,1}$$



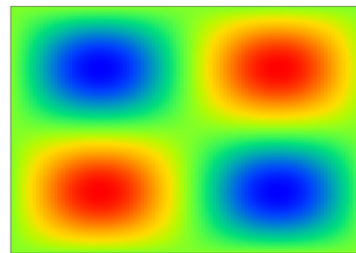
$$\omega_{3,1} = 1.86\omega_{1,1}$$



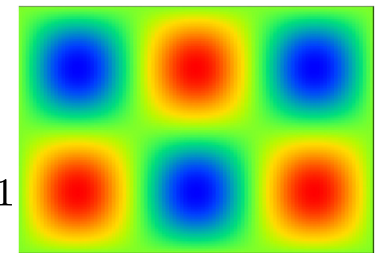
$$\omega_{1,2} = 1.75\omega_{1,1}$$



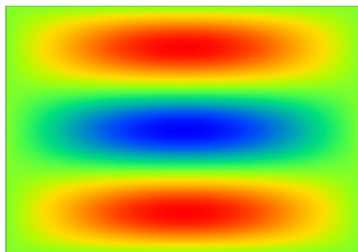
$$\omega_{2,2} = 2\omega_{1,1}$$



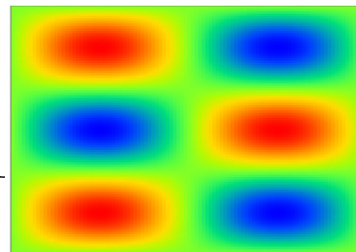
$$\omega_{3,2} = 2.35\omega_{1,1}$$



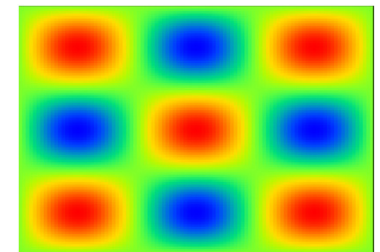
$$\omega_{1,3} = 2.56\omega_{1,1}$$



$$\omega_{2,3} = 2.73\omega_{1,1}$$



$$\omega_{3,3} = 3\omega_{1,1}$$



# 円形膜の振動 (1)

- ▶ 半径  $R$  の円の形状の膜の振動を考える

- ▶ 極座標表現:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$u(x, y, t) \Rightarrow u(r, \theta, t) \text{ と表す}$$

- ▶ 境界条件:  $u(R, \theta, t) = 0,$

$$u(r, \pi, t) = u(r, -\pi, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi, t)$$

- ▶ 極座標表現におけるラプラス作用素

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

周期境界条件  
(Periodic boundary  
condition; Cyclic  
symmetry condition)

- ▶ 極座標表現での波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\}$$



## 円形膜の振動 (2)

▶ 変数分離:  $u(r, \theta, t) = R(r)H(\theta)W(t)$

弦の振動の場合と同様に、

$$\frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 H} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \right\} = -\omega^2$$

円周上の境界条件よりこれが正またはゼロの場合は不適 (証明省略)

これをさらに変形して、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \omega^2 W = 0 \quad \longrightarrow \quad W(t) = A_t \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} r^2 = -\frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = n^2$$

周期境界条件よりこれが負の場合は不適 (証明省略)

# 円形膜の振動 (3)

- ▶ 円周方向 ( $\theta$  方向) の方程式

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + n^2 H = 0 \quad \longrightarrow \quad H(\theta) = A_\theta \cos(n\theta + \phi)$$

周期境界条件より  $n$  は整数 (負の  $n$  は冗長なので考えない)

- ▶ 半径方向 ( $r$  方向) の方程式

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial R}{\partial \bar{r}} + \left( 1 - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \right) R = 0$$

$$\bar{r} = (\omega/c)r$$

$n$  次ベッセル関数

$n$  次ベッセル方程式

解:

$$R(r) = A_r J_n \left( \frac{\omega}{c} r \right)$$

境界条件より

$$\omega = \frac{c\lambda}{R}$$

$\lambda$ :  $n$  次ベッセル関数のあるゼロ点

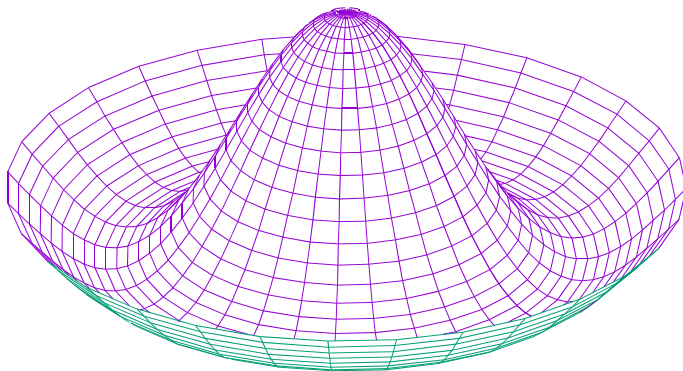
# 円形膜の振動 (4)

▶ 異なる  $\phi$  は別モード  $\Rightarrow$  sinとcosに分解

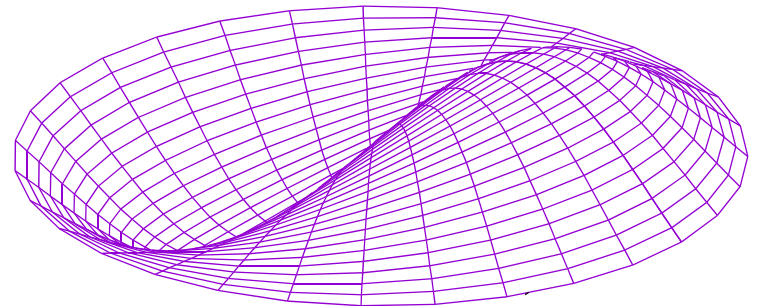
▶ 最終的な解

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} J_n \left( \frac{\omega_{n,j}}{c} r \right) \{ A_{n,j} \cos(n\theta) \cos(\omega_{n,j}t + \varphi_{n,j}) + B_{n,j} \sin(n\theta) \cos(\omega_{n,j}t + \psi_{n,j}) \}$$

ここで、 $\omega_{n,j} = \frac{c\lambda_{n,j}}{R}$  ( $\lambda_{n,j}$ :  $n$  次ベッセル関数の  $j$  番目のゼロ点)



$n = 0, j = 2$



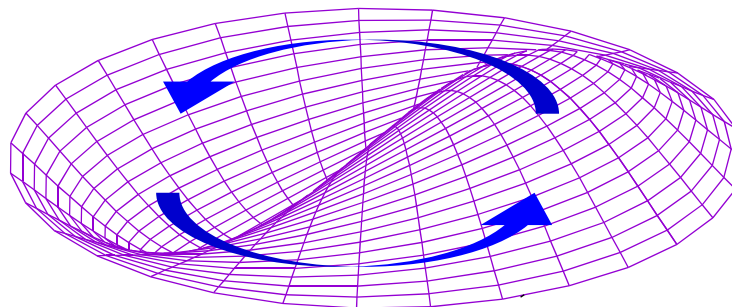
$n = 1, j = 1$

## 円形膜の振動 (4)

- ▶  $\varphi_{n,j}$  と  $\psi_{n,j}$  は別
- ▶  $A_{n,j} = 1, B_{n,j} = 1, \varphi_{n,j} = 0, \psi_{n,j} = -\pi/2$  のとき

$$\begin{aligned} & J_n \left( \frac{\omega_{n,j}}{c} r \right) \{ \cos(n\theta) \cos(\omega_{n,j}t) + \sin(n\theta) \cos(\omega_{n,j}t - \pi/2) \} \\ &= J_n \left( \frac{\omega_{n,j}}{c} r \right) \{ \cos(n\theta) \cos(\omega_{n,j}t) + \sin(n\theta) \sin(\omega_{n,j}t) \} \\ &= J_n \left( \frac{\omega_{n,j}}{c} r \right) \cos(n\theta - \omega_{n,j}t) \end{aligned}$$

円周方向の進行波



# 梁の振動の方程式 (1)

- ▶ 梁 (はり; beam) の振動 ( $E$ : ヤング率,  $I$ : 断面二次モーメント,  $\rho$ : 線密度)
- ▶ 図の矢印方向が正 (右から働くモーメント・力は、左から働く場合と逆)
- ▶ 曲げモーメントと梁の形状の関係

作用・反作用

$$M(x) = -E(x)I(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

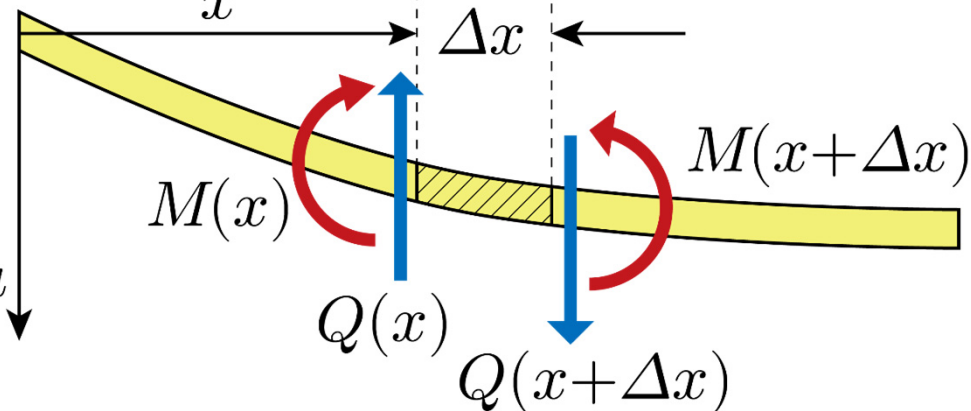
- ▶ モーメントのつり合い方程式

$$M(x + \Delta x) - M(x) - (\Delta x/2)(Q(x + \Delta x) + Q(x)) = 0$$

両辺  $\Delta x$  で割って  $\Delta x \rightarrow 0$

$$Q(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) u$$



# 梁の振動の方程式 (1)

- ▶ 微小要素の縦方向の運動方程式 (引っ張り・圧縮力がないと仮定)

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\bar{x}) \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} d\bar{x} = Q(x + \Delta x) - Q(x)$$

- ▶ 両辺  $\Delta x$  で割って  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- ▶ 梁の方程式

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0$$

- ▶ 一様な梁の場合

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad \alpha = \sqrt{EI/\rho}$$

# 梁の振動－変数分離

- ▶ 弦の振動と同様に、単一モードを考えて変数分離

$$u(x, t) = \Xi(x)W(t)$$

- ▶ 代入して整理 (下記の式は定数でなくてはならない)

$$\frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\frac{\alpha^2}{\Xi} \frac{\partial^4 \Xi}{\partial x^4} = \boxed{-\omega^2}$$

現実の境界の組み合わせでは、これが正またはゼロの場合は不適 (証明省略)

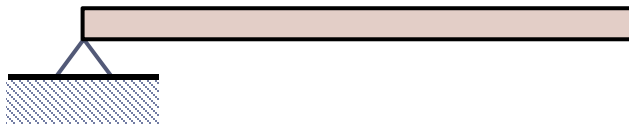
- ▶ 分離された方程式と解 (一様な梁の場合;  $L$ : 梁の長さ)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \omega^2 W = 0 \\ \frac{\partial^4 \Xi}{\partial x^4} - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \Xi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W(t) = A_t \cos(\omega t + \varphi) \\ \Xi(x) = C_1 \cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \\ \quad + C_3 \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_4 \sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \end{cases} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}L$$

# 梁の境界条件

- ▶ 単純支持 (たわみ0, モーメント0)

$$\Xi = 0, \Xi'' = 0$$



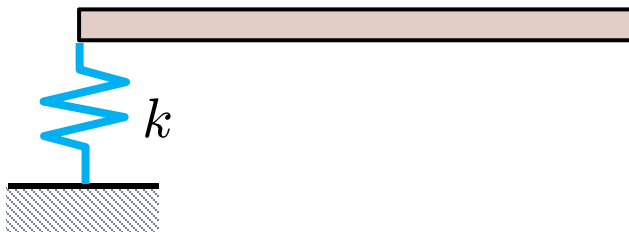
- ▶ 固定 (たわみ0, 傾斜0)

$$\Xi = 0, \Xi' = 0$$



- ▶ 弾性支持 (モーメント0, 力釣合)

$$\Xi'' = 0, \pm EIY''' + kY = 0$$



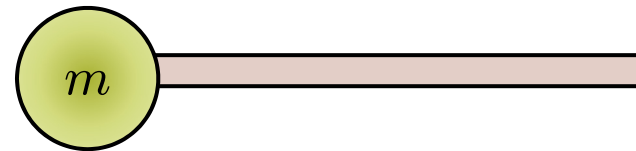
- ▶ 自由 (モーメント0, 剪断力0)

$$\Xi'' = 0, \Xi''' = 0$$



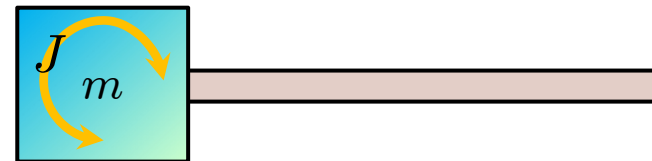
- ▶ 集中質量 (モーメント0, 力釣合)

$$\Xi'' = 0, \pm EI\Xi''' = m\omega^2\Xi$$



- ▶ 剛体 (モーメント釣合, 力釣合)

$$\pm EI\Xi''' = m\omega^2\Xi, \mp EI\Xi'' = J\omega^2\Xi'$$



符号同順で、上が左端、下が右端



# 単純支持梁の振動解

## ▶ 単純支持梁の境界条件

$$\Xi(0) = 0, \Xi''(0) = 0, \Xi(L) = 0, \Xi''(L) = 0$$

## ▶ 一般解に代入

左端:  $C_1 + C_3 = 0, -C_1 + C_3 = 0 \implies C_1 = C_3 = 0$

右端 (左端条件を考慮):

$$C_2 \sin \lambda + C_4 \sinh \lambda = 0, -C_2 \sin \lambda + C_4 \sinh \lambda = 0$$

$\lambda > 0$  より  $\sinh \lambda \neq 0 \implies C_4 = 0$

## ▶ $C_2 \sin \lambda = 0$ が非ゼロの $C_2$ を許容する条件 $\implies \lambda = n\pi$ ( $n = 1, 2, \dots$ )

## ▶ 一般解:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \left( \frac{i\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{\alpha i^2 \pi^2}{L^2} t + \varphi_i \right)$$

$\implies$  周波数は、モード番号の2乗に比例し、梁の長さの2乗に反比例する。

# 両端固定梁の振動解 (1)

- ▶ 境界条件:  $\Xi(0) = 0, \Xi'(0) = 0, \Xi(L) = 0, \Xi'(L) = 0$
- ▶ 左端より、  $C_1 + C_3 = 0, C_2 + C_4 = 0$
- ▶ 右端より、  $\mathbf{K} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \cos \lambda - \cosh \lambda & \sin \lambda - \sinh \lambda \\ -\sin \lambda - \sinh \lambda & \cos \lambda - \cosh \lambda \end{bmatrix}$
- ⇒ 非ゼロ解が存在する条件:  $\det \mathbf{K} = 2(1 - \cos \lambda \cdot \cosh \lambda) = 0$
- ▶ 一般解

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[ (\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i) \left\{ \cos \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) - \cosh \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) \right\} \right. \\ \left. - (\cos \lambda_i - \cosh \lambda_i) \left\{ \sin \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) - \sinh \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) \right\} \right] \\ \cdot \cos \left( \frac{\alpha \lambda_i^2}{L^2} t + \varphi_i \right),$$

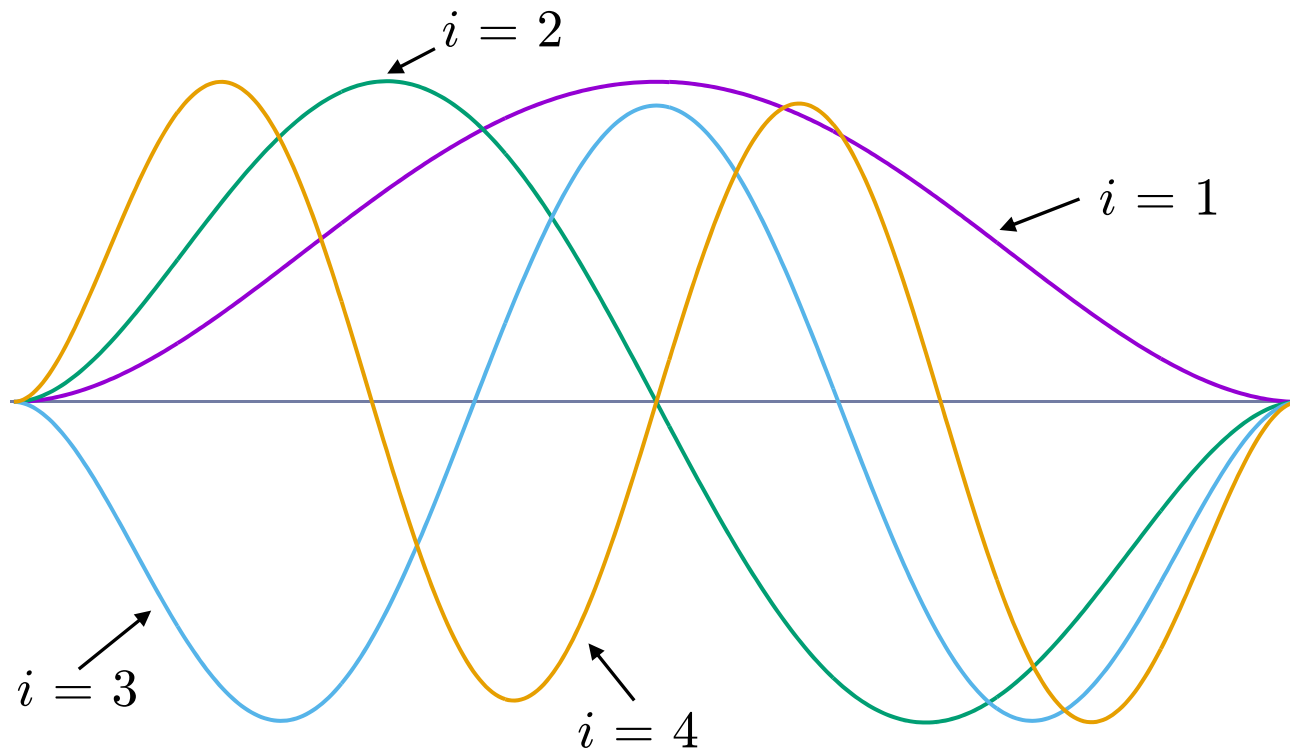
$\lambda_i = i$ -th positive solution of  $\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = 1$

## 両端固定梁の振動解 (2)

▶  $\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = 1$  の解:

$$\lambda_1 = 4.73004, \lambda_2 = 7.85320, \lambda_3 = 10.99561, \lambda_4 = 14.13717, \dots$$

▶ 各固有モードの波形 (最大振幅で正規化)



# 先端質量無し片持ち梁の振動解 (1)

- ▶ 左固定, 右自由の境界条件:  $\Xi(0) = 0, \Xi'(0) = 0, \Xi''(L) = 0, \Xi'''(L) = 0$
  - ▶ 左端より、  $C_1 + C_3 = 0, C_2 + C_4 = 0$
  - ▶ 右端より、  $\mathbf{K} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\cos \lambda - \cosh \lambda & -\sin \lambda - \sinh \lambda \\ \sin \lambda - \sinh \lambda & -\cos \lambda - \cosh \lambda \end{bmatrix}$
- ⇒ 非ゼロ解が存在する条件:  $\det \mathbf{K} = 2(\cos \lambda \cdot \cosh \lambda + 1) = 0$

## ▶ 一般解

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[ (\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i) \left\{ \cos \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) - \cosh \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) \right\} \right. \\ \left. - (\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i) \left\{ \sin \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) - \sinh \left( \frac{\lambda_i}{L} x \right) \right\} \right] \\ \cdot \cos \left( \frac{\alpha \lambda_i^2}{L^2} t + \varphi_i \right),$$

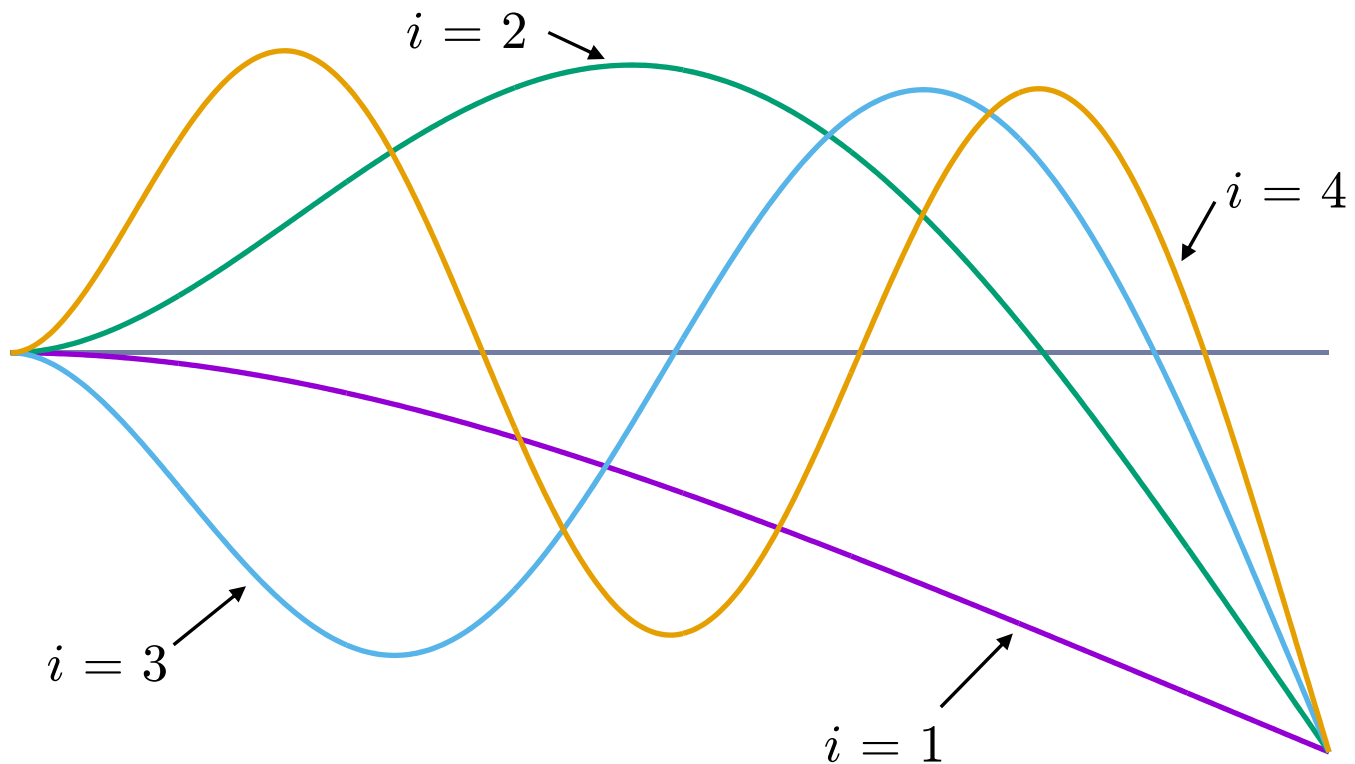
$\lambda_i = i$ -th positive solution of  $\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = -1$

# 先端質量無し片持ち梁の振動解 (2)

▶  $\cos \lambda \cdot \cosh \lambda = -1$  の解:

$$\lambda_1 = 1.87510, \lambda_2 = 4.69409, \lambda_3 = 7.85476, \lambda_4 = 10.99554, \dots$$

▶ 各固有モードの波形 (最大振幅で正規化)



# 解析力学

## 第2章

# 仮想仕事の原理(1)

- ▶  $n$  質点系の力の釣り合いを考える。
- ▶ 各質点  $i$  の位置を  $x_i \in \mathbb{R}^3$  とする。それらを全てまとめたベクトルを  $x$  とおく。
- ▶ 釣り合い状態では、各質点  $i$  においての力の合力  $f_i(x) \in \mathbb{R}^3$  はゼロ。

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{力のつりあい式})$$

- ▶ この式は、

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)^T \delta x_i = 0, \quad \forall \delta x_1, \dots, \delta x_n$$

と等価。 (仮想仕事の原理; virtual work principle)

「恒等式が成り立つ」 $\Rightarrow$ 「係数 = 0」の関係を思い出すこと。

[注意] この段階では  $\delta x_i$  は適当に持ち出した数学上の変数。

## 仮想仕事の原理(2)

- ▶  $\delta x_i$  を、質点  $i$  の「仮想的な微小な変位」(仮想変位; virtual displacement) とみなす。これはすなわち、 $x_i$  が  $x_i + \delta x_i$  に変位したと考える。
- ▶ 「力×変位」は「仕事」。よって  $f_i(x)^T \delta x_i$  は仮想仕事(virtual work)。

### ▶ 仮想仕事の原理

「釣り合い状態では、全ての微小な仮想変位に対し仮想仕事の和はゼロ」

- ▶ 変位と力は同じ向きが正  $\Rightarrow$  仮想仕事は、力が質点に対して行う仕事。質点が外界に対して行う仕事ではない。
- ▶ [疑問] なぜ仮想変位は微小でなくてはならないのか?  
[回答] 微小じゃないと  $f_i(x)^T \delta x_i$  は仕事量と呼べなくなるから。  
なぜならば、 $x_i$  が  $x_i + \delta x_i$  に変位すると  $f_i(x)$  の値も変化する。



# 厳密な仕事量で見ると

- ▶ ポテンシャル場 + 一定外力を仮定 (下の積分が積分経路によらない)
- ▶ 仮想変位を微小としない場合の厳密な仕事量

$$\begin{aligned}\Delta W(x, \delta x) &= \int_{(0, \dots, 0)}^{(\delta x_1, \dots, \delta x_n)} (f_1(x+p)^T, \dots, f_n(x+p)^T) dp \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Delta W}{\partial \delta x_i}(x, 0) \delta x_i + O(\delta x^2)\end{aligned}$$

- ▶ 「 $\delta x_i$  に関する一次の項がゼロ」が仮想仕事の原理

$$\delta W(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Delta W}{\partial \delta x_i}(x, 0) \delta x_i = \sum_{i=1}^n f_i(x)^T \delta x_i = 0$$

# 拘束力がある場合(1)

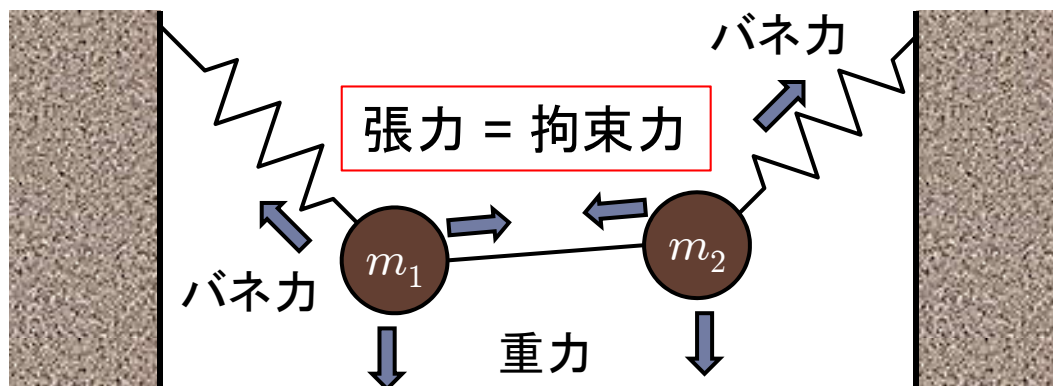
- ▶ 全ての質点が全く独立に動いているわけではない。
- ▶  $3n$  個より少ない  $m$  個の自由度しかない場合を考える。

$$x = \Phi(q), \quad q = (q_1, \dots, q_m)^T$$

- ▶ 本来の仮想変位の意味では、 $x$  (あるいは  $q$ ) を固定した場合、仮想変位にも  $m$  個の自由度しかない。(単なる未定乗数の意味では  $3n$  個ある)

$$\delta x = \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \delta q$$

- ▶ 「全ての微小な仮想変位」を考えると、力の釣り合いに拘束力 = 内力を考えなければならない。



拘束:  
糸の長さが変わらない  
拘束力:  
糸の張力

## 拘束力がある場合(2)

- 力を「拘束力」と「それ以外の力」に分ける。

$$f_i(x) = \boxed{f_{ci}(x)} + f_{ei}(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

拘束力

- 2つの力に分けた仮想仕事の原理:

$$\delta W(x) = \sum_{i=1}^n \boxed{f_{ci}(x)^T \delta x_i} + \sum_{i=1}^n f_{ei}(x)^T \delta x_i = 0$$

拘束条件を満たす仮想変位に対しては、拘束力に対して成す仕事の総和はゼロ。

- 拘束力がある場合の仮想仕事の原理: (拘束力を考えなくて良い!!!)

$$\delta W(x) = \sum_{i=1}^n f_{ei}(x)^T \delta x_i = 0, \quad \boxed{\forall \delta x = (\partial \Phi / \partial q) \delta q}$$

すなわち  $q$  だけで考えて、

拘束条件を満たす仮想変位に対してのみ成立

$$\delta W(q) = [f_{e1}(\Phi(q))^T, \dots, f_{en}(\Phi(q))^T] \frac{\partial \Phi}{\partial q} \delta q = 0$$

# 内部エネルギーで考えた仮想仕事の原理

- ▶ 拘束力以外の力に対する仮想仕事が、「ポテンシャルエネルギー  $D(x)$ 」の増加量になる場合を考える。
- ▶ ポテンシャルエネルギー (potential energy) と力の関係の例

- バネに蓄積されるエネルギー

$$D(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad f(x) = -\frac{\partial D(x)}{\partial x} = -kx$$

- 位置エネルギー

$$D(x) = mgx, \quad f(x) = -\frac{\partial D(x)}{\partial x} = -mg$$

- ▶ ポテンシャルによる力と拘束力しかない場合は、総ポテンシャルエネルギー  $D(x)$  を用いて、仮想仕事の原理は、次のように書ける

$$-\delta D(\Phi(q)) = -\frac{\partial D(\Phi(q))}{\partial q} \delta q = 0$$

ポテンシャルによる力と拘束力のみの場合、**微小な仮想変位に対しポテンシャルエネルギーが停留**することが、釣り合いの条件。

# 動的な場合 — ダランベールの原理

- ▶ 静的な釣り合いではなく、物が動く状況(動的な場合)を考える。  
(動力学 = Dynamics)
- ▶ 動的な場合に対する仮想仕事の原理の拡張 ⇒ ダランベールの原理
- ▶ ニュートンの運動方程式 (Newton's law):

$$-m\ddot{x}_i + f_i(x) = 0$$

「慣性力」として考える

- ▶ ダランベールの原理 (d'Alembert's principle):

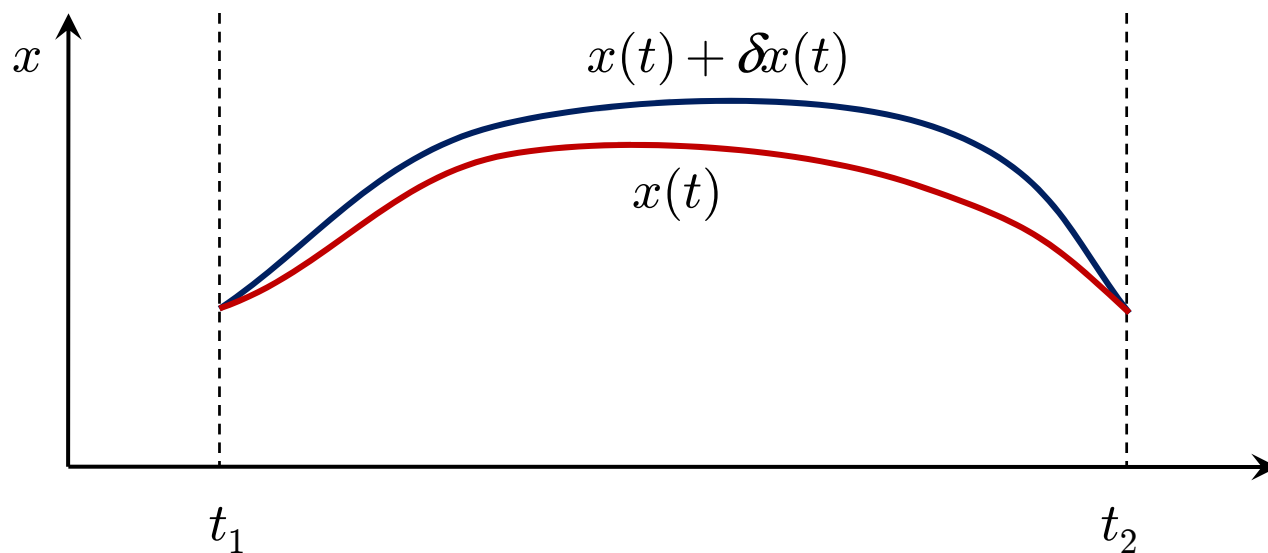
$$\sum_{i=1}^n (-m\ddot{x}_i + f_i(x))^T \delta x_i = 0$$

⇒ 仮想仕事の原理と同様に、拘束を満たす微小な仮想変位だけを考えることで、拘束力を無視できる。

# 変分

- ▶ 仮想変位  $\delta x_i$  は、物の動きの軌道に沿って変わるべきもの。⇒  $\delta x_i(t)$
- ▶  $\delta$  は、時間に関する微分  $d$  とは別物。⇒ 変分 (variation)
- ▶ 軌道  $x(t)$  が  $x(t) + \delta x(t)$  に変わる、と考える。
- ▶ 考えている時間区間  $\{t \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$  の端で変分はゼロと考える。

$$\delta x_i(t_1) = 0, \quad \delta x_i(t_2) = 0$$



# 運動エネルギーとの関係

- ▶ 運動エネルギー (kinetic energy):

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\dot{x}_i\|^2$$

- ▶ 運動エネルギーの変分の時間積分:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta T dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} m_i (\|\dot{x}_i + \delta \dot{x}_i\|^2 - \|\dot{x}_i\|^2) dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} m_i (2\dot{x}_i^T \delta \dot{x}_i + \|\delta \dot{x}_i\|^2) dt$$

部分積分

$$= \left[ \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^T \delta x_i \right]_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} m_i \ddot{x}_i^T \delta x_i dt + O(\delta \dot{x}^2)$$

境界で仮想変位ゼロ

$$= - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} m_i \ddot{x}_i^T \delta x_i dt + O(\delta \dot{x}^2)$$

# ダランベールの原理の書き換え

- ▶ 力を拘束力とポテンシャル力だけに限定。
- ▶ 最小作用の原理(principle of minimum action): (最小作用の原理と呼ばれるものには2つあって、以下は**ハミルトンの原理**(Hamilton principle)。  
境界条件と拘束を満たす微小な  $\delta x$ ,  $\delta \dot{x}$  に対して、

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} (-m_i \ddot{x}_i + f_i(x))^T \delta x_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T - \delta D dt = \delta S = 0$$

- ▶ ラグランジアン (Lagrangian):

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - D(q)$$

$T - D$  を独立な自由度で表現したもの

- ▶ 作用 (Action):

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt$$

最小作用の原理:

力学法則に従う自然な動きの軌道に沿って、  
作用は停留する



# 最小作用の原理から運動方程式を導く

- ▶ 両端で仮想変位ゼロなので

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - L(q, \dot{q}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T \delta q + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T \delta \dot{q} dt + O((\delta q, \delta \dot{q})^2) \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T \right\} \delta q dt + O((\delta q, \delta \dot{q})^2) = 0\end{aligned}$$

- ▶ 全ての微小な  $\delta q(t)$  に関して  $\delta S = 0$  なので、

オイラー・ラグランジュ方程式 (Euler-Lagrange equation):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = 0$$

# オイラー・ラグランジュ方程式に関する注意

- ▶ ポテンシャル力・慣性力・拘束力以外の力が加わるときは、右辺はゼロではない。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = F$$

- ▶  $F = (F_1, \dots, F_m)^T$  は  $q$  からみた外力。
  - たとえば  $q_i$  が回転ならば、 $F_i$  はその回転軸に加わるトルク
  - たとえば  $q_i$  が直線状の変位ならば、 $F_i$  はその自由度に加わる力 (力の動きの方向に沿った分力)
  - 摩擦力・ダンピング力も、この外力に分類される。
- ▶ ラグランジアン  $L$  から運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $D$  を分離できる。⇒引き算したことで情報は失われていない。

$$D(q) = -L(q, 0)$$

$$T(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) - L(q, 0)$$

# 一般化座標・一般化速度

---

- ▶ 一般化座標 (generalized coordinate):  $q$
- ▶ 一般化速度 (generalized velocity):  $\dot{q}$
- ▶ 一般化加速度 (generalized acceleration):  $\ddot{q}$
- ▶ 一般化力 (generalized force):  $F$
- ▶ 回転の場合、一般化座標は回転角, 一般化速度は角速度, 一般化加速度は角加速度, 一般化力はトルク
  
- ▶ 質点の集合ではなく、質量が分布している場合でも、一般化座標が有限次元ならば、「質点に関する総和」を「質量の分布に関する積分」に変えるだけで、オイラー・ラグランジュ方程式は成り立つ。  
⇒ 無限個の(分布した)拘束力をまとめて無視でき、有限次元の微分方程式が簡単に得られる。

# E-L方程式の例 — 単純な連成振動

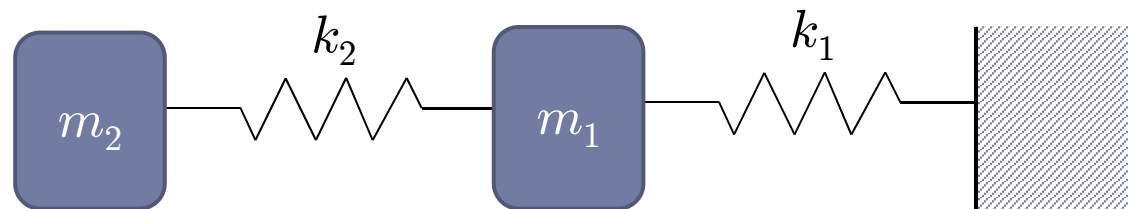
- ▶ 外力と減衰項を除いて考える
- ▶ 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2, \quad D(x) = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

- ▶ オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right)^T - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^T + \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)^T = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_1\dot{x}_1 \\ m_2\dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) \\ k_2(x_2 - x_1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) \end{pmatrix} = 0$$

運動方程式



# 等速直線運動を回転座標で見る

- ▶ 静止座標系  $(x, y)$  での運動を、等角速度  $\omega$  で回転している回転座標  $(X, Y)$  で、見るとどうなるか。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- ▶ 速度の関係

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

- ▶ ラグランジアン ...  $t$  を陽に含まず、時不変。ただし、運動エネルギーが一般化速度の正定関数にならないので、特殊な場合といえる。

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 - 2\omega(\dot{X}Y - X\dot{Y}) + \omega^2(X^2 + Y^2)\}$$

- ▶ オイラー・ラグランジュ方程式

$$m\ddot{X} - 2m\omega\dot{Y} - m\omega^2 X = 0$$

$$m\ddot{Y} + 2m\omega\dot{X} - m\omega^2 Y = 0$$

□ の半分 = コリオリ力 (Coriolis force)

□ の半分 + □ = 遠心力 (centrifugal force)

# 時不変な座標変換では(1)

- ▶ 時不変な座標変換では、

$$x = \Phi(q) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \dot{q}$$

- ▶ このときの運動エネルギー

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \right)^T \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix} \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \dot{q}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

一般化速度の2次形式 (quadratic form) = 同次2次式

- ▶  $M(q)$  : 慣性行列 (inertia matrix)  
⇒ 正定対称行列になる

# 時不変な座標変換では(2)

- ▶ 慣性行列によるE-L方程式の表現:

$$\boxed{M(q)\ddot{q}} + \boxed{\frac{\partial M(q)\dot{q}}{\partial q}\dot{q}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M(q)\dot{q}}{\partial q} \right)^T \dot{q} + \boxed{\left( \frac{\partial D(q)}{\partial q} \right)^T} = \boxed{F} \quad \text{外力}$$

慣性力      コリオリ力      遠心力      ポテンシャル力

$$\underbrace{\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T \right)}_{\text{慣性力 + コリオリ力}} - \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T}_{\text{遠心力 + ポテンシャル力}}$$

# 例題 – バネ付きの振り子

- ▶  $r$ : バネの縮み,  $\theta$ : 振り子の振角
- ▶  $\tau$ : 振り子へのトルク(外力)
- ▶  $l$ : 棒の長さ – バネの自然長
- ▶  $k$ : バネ定数,  $m$ : おもりの質量
- ▶  $g$ : 重力加速度

- ▶ 一般化座標  $q = (r, \theta)^T$

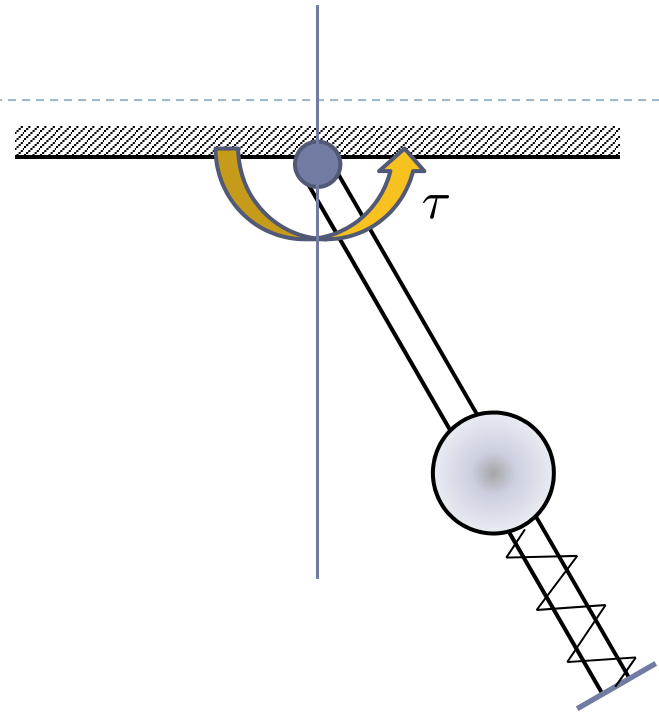
- ▶ ラグランジアン:

$$L(\dot{q}, q) = \frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 + (\ell + r)^2 \dot{\theta}^2 \} - \left\{ \frac{k}{2} r^2 - mg(\ell + r) \cos \theta \right\}$$

- ▶ オイラー・ラグランジュ方程式 (運動方程式):

$$m\ddot{r} - m(\ell + r)\dot{\theta}^2 + kr - mg \cos \theta = 0$$

$$m(\ell + r)^2 \ddot{\theta} + 2m(\ell + r)\dot{r}\dot{\theta} + mg(\ell + r) \sin \theta = \tau$$





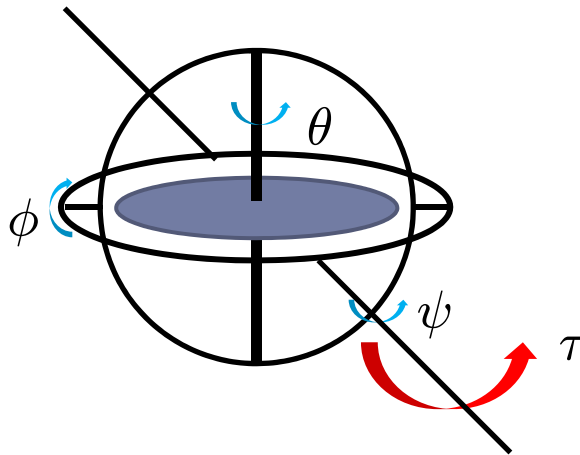
# ジャイロ効果(1)

- ▶ 図において、コマに固定した座標系での角速度ベクトルは、

$$\omega_S = \begin{pmatrix} -\cos \phi \sin \theta \cdot \dot{\psi} + \cos \theta \cdot \dot{\phi} \\ -\cos \phi \cos \theta \cdot \dot{\psi} - \sin \theta \cdot \dot{\phi} \\ \sin \phi \cdot \dot{\psi} + \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

- ▶ よって運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \{ I_{xy} (-\cos \phi \sin \theta \cdot \dot{\psi} + \cos \theta \cdot \dot{\phi})^2 \\ + I_{xy} (\cos \phi \cos \theta \cdot \dot{\psi} + \sin \theta \cdot \dot{\phi})^2 + I_z (\sin \phi \cdot \dot{\psi} + \dot{\theta})^2 \}$$



# ジャイロ効果(2)

- ▶ オイラー・ラグランジュ方程式:

$$\begin{pmatrix} (I_z \sin^2 \phi + I_{xy} \cos^2 \phi) \ddot{\psi} + I_z \sin \phi \cdot \ddot{\theta} + \cos \phi \cdot \dot{\phi} \{ I_z \dot{\theta} + 2(I_z - I_{xy}) \sin \phi \cdot \dot{\psi} \} \\ I_{xy} \ddot{\phi} - \cos \phi \cdot \dot{\psi} \{ I_z \dot{\theta} + (I_z - I_{xy}) \sin \phi \dot{\psi} \} \\ I_z \sin \phi \cdot \ddot{\psi} + I_z \ddot{\theta} + I_z \cos \phi \cdot \dot{\phi} \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$= (\tau, 0, 0)^T$$

- ▶ 特に、 $\phi = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$ ,  $\tau = 0$  のとき、

$$\ddot{\psi} = 0, \quad \ddot{\phi} = -\frac{I_z}{I_{xy}} \dot{\psi} \dot{\theta}, \quad \ddot{\theta} = 0$$

コマが回転しているときに、 $\psi$ 軸に角速度を与えると、直交する $\phi$ 軸回りにトルクが発生

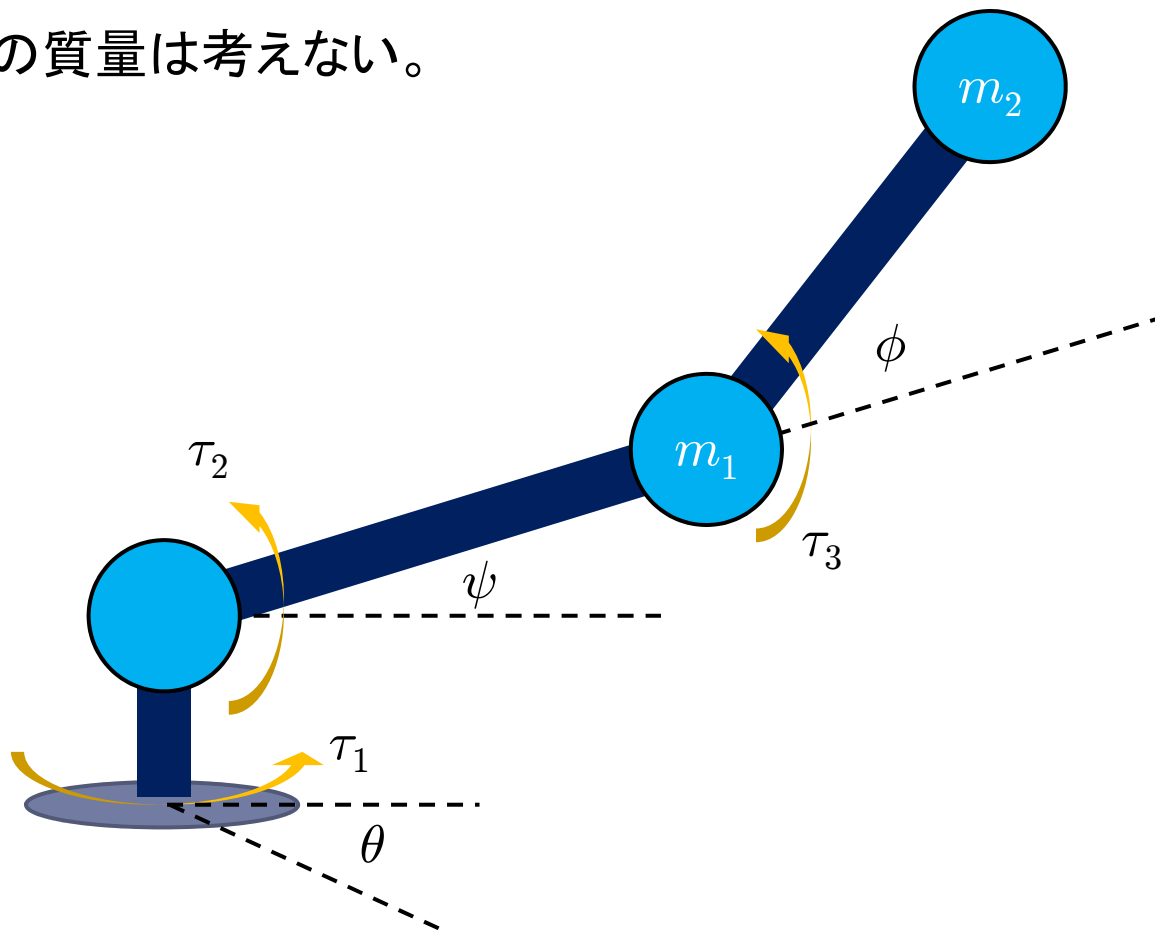
- ▶ コマに固定した座標における角運動量ベクトル

$$L_S = \begin{bmatrix} I_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \omega_S, \Rightarrow \dot{L}_S|_{\tau=0} = L \times \omega_S$$

ジャイロモーメント

# 3リンクのロボットアーム(1)

- ▶ 3リンクのロボットアームを考える。
- ▶ リンク自体の質量は考えない。



## 3リンクのロボットアーム(2)

### ▶ $m_1, m_2$ の位置

$$p_1 = \begin{pmatrix} l_1 \cos \psi \sin \theta \\ l_1 \cos \psi \cos \theta \\ l_1 \sin \psi \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} l_1 \cos \psi \sin \theta + l_2 \cos(\psi + \phi) \sin \theta \\ l_1 \cos \psi \cos \theta + l_2 \cos(\psi + \phi) \cos \theta \\ l_1 \sin \psi + l_2 \sin(\psi + \phi) \end{pmatrix}$$

### ▶ $m_1, m_2$ の速度

$$v_1 = \begin{pmatrix} l_1 \cos \psi \cos \theta \cdot \dot{\theta} - l_1 \sin \psi \sin \theta \cdot \dot{\psi} \\ -l_1 \cos \psi \sin \theta \cdot \dot{\theta} - l_1 \sin \psi \cos \theta \cdot \dot{\psi} \\ l_1 \cos \psi \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} (l_2 \cos(\psi + \phi) + l_1 \cos \psi) \cos \theta \cdot \dot{\theta} - \{l_2 \sin(\psi + \phi)(\dot{\psi} + \dot{\phi}) + l_1 \sin \psi \cdot \dot{\psi}\} \sin \theta \\ -(l_2 \cos(\psi + \phi) + l_1 \cos \psi) \sin \theta \cdot \dot{\theta} - \{l_2 \sin(\psi + \phi)(\dot{\psi} + \dot{\phi}) + l_1 \sin \psi \cdot \dot{\psi}\} \cos \theta \\ l_2 \cos(\psi + \phi)(\dot{\psi} + \dot{\phi}) + l_1 \cos \psi \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

### ▶ ラグランジアン

$$L = \frac{m_1}{2} v_1^T v_1 + \frac{m_2}{2} v_2^T v_2 - m_1 g p_{1,z} - m_2 g p_{2,z}$$

# 3リンクのロボットアーム(3)

---

- ▶ 一般化座標:

$$q = (\theta, \psi, \phi)^T, \quad \dot{q} = (\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi})^T$$

- ▶ 慣性行列:

$$M(q) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & d \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{2}(l_2^2 m_2 \cos(2\psi + 2\phi) + 2l_1 l_2 m_2 \cos(2\psi + \phi) \\ + (m_1 + m_2)l_1^2 \cos(2\psi) + 2l_1 l_2 m_2 \cos \phi + (l_2^2 + l_1^2)m_2 + l_1^2 m_1),$$

$$b = 2l_1 l_2 m_2 \cos \phi + (l_1^2 + l_2^2)m_2 + l_1^2 m_1,$$

$$c = l_1 l_2 m_2 \cos \phi + l_2^2 m_2,$$

$$d = l_2^2 m_2$$

# 3リンクのロボットアーム(4)

## ▶ コリオリ力と遠心力:

$$c(q, \dot{q}) =$$

$$\begin{pmatrix} \{-m_2 l_2 (l_2 \sin(2\psi + 2\phi) + l_1 \sin(2\psi + \phi) + l_1 \sin \phi) \dot{\phi} \\ \quad - (l_2^2 m_2 \sin(2\psi + 2\phi) - 2l_1 l_2 m_2 \sin(2\psi + \phi) + l_1^2 (m_1 + m_2) \sin(2\psi)) \dot{\psi}\} \dot{\theta} \\ \frac{1}{2} \{ (l_2^2 m_2 \sin(2\psi + 2\phi) + 2l_1 l_2 m_2 \sin(2\psi + \phi) + l_1^2 (m_1 + m_2) \sin(2\psi)) \dot{\theta}^2 \\ \quad - 4l_1 l_2 m_2 \sin \phi \cdot \dot{\psi} \dot{\phi} - 2l_1 l_2 m_2 \sin \phi \cdot \dot{\phi}^2 \} \\ \frac{1}{2} \{ (l_2^2 m_2 \sin(2\psi + 2\phi) + l_1 l_2 m_2 \sin(2\psi + \phi) + l_1 l_2 m_2 \sin \phi) \dot{\theta}^2 + 2l_1 l_2 m_2 \sin \phi \cdot \dot{\psi}^2 \} \end{pmatrix}$$

## ▶ 重力項:

$$g(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 m_2 g \cos(\psi + \phi) + l_1 (m_1 + m_2) g \cos \psi \\ l_2 m_2 g \cos(\psi + \phi) \end{pmatrix}$$

## ▶ 運動方程式:

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$$

# 一般化運動量

- ▶ 一般化運動量 (generalized momentum) :

$$p_i = \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right)^T \quad \text{定義}$$

- ▶ 運動エネルギーが一般化速度の2次形式ならば、

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - D(q) \Rightarrow p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = M(q) \dot{q}$$

- ▶ 平行移動に関して  $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 \Rightarrow p_1 = m \dot{q}_1$  通常の運動量と一致
- ▶ 回転運動に関して  $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 \Rightarrow p_1 = J \dot{q}_1$  角運動量

一般化運動量で表したシステム表現はどのようになるのでしょうか?

# 座標変換

- ▶ 一般化座標・一般化速度の組み合わせの表現



座標変換

一般化座標・一般化運動量による表現

$$\dot{q} = \Phi(p, q), \quad p = \Psi(q, \dot{q})$$

- ▶ ラグランジアンは「一般化座標・一般化速度の組み合わせ」  
ラグランジアンの微小変位:

$$dL = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\dot{q} + \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) dq = p^T d\dot{q} + \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) dq$$

この項を消すような表現がほしい



# ハミルトニアン

- ▶ ハミルトニアン (Hamiltonian) :

$$H(p, q) = [\dot{q}^T p - L(q, \dot{q})] \Big|_{\dot{q}=\Phi(p, q)} \quad \text{定義}$$

- ▶ 運動エネルギーが一般化速度の2次形式ならば、

$$p = M(q)\dot{q}$$

$$\begin{aligned} H(p, q) &= \left[ \dot{q}^T M(q)\dot{q} - \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q)\dot{q} - D(q) \right) \right] \Big|_{\dot{q}=M(q)^{-1}p} \\ &= \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q)p + D(q) \end{aligned}$$

結局、  $H = T + D$ 。

- ▶ つまり、通常の場合、ハミルトニアンは、(一般化運動量で表現した)運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和と一致する。すなわち、システム内部の全エネルギーに一致する。

# ルジャンドル変換

- ▶ ハミルトニアンの微小変位とラグランジアンの微小変位との関係

$$dH = \dot{q}^T dp + p^T d\dot{q} - dL$$

消去したかった項と同じ

$$dH = \dot{q}^T dp - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\dot{q}$$

$H$ の微小変位が、(定義通りに)  $p$ と $q$ の微小変位で表現されている。  
⇒ルジャンドル変換 (Legendre transformation)

- ▶ 恒等式

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) dp + \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right) dq \text{ と項別比較}$$

- ▶ ルジャンドル変換によって得られる関係式:

$$\dot{q} = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)^T, \quad \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = - \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

両辺の偏微分の意味が違う  
左辺:  $q$ と $\dot{q}$ で表現した場合  
右辺:  $p$ と $q$ で表現した場合

# 正準方程式

---

- ▶ 一般化運動量を使ったオイラー・ラグランジュ方程式:

$$\dot{p} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T + F = - \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right)^T + F$$

以上まとめると、

- ▶ Hamiltonの正準方程式 (Hamilton's canonical equation):

$$\dot{q} = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)^T$$

$$\dot{p} = - \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right)^T + F$$

# エネルギー保存則

---

- ▶ ハミルトニアンは全エネルギー
- ▶ 外力なし ( $F=0$ ) のとき、全エネルギーが保存されることを示そう。
- ▶ ハミルトニアンの時間微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(p, q) &= \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) \dot{p} + \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) \dot{q} \\ &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T + \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T = 0\end{aligned}$$

時間微分がゼロ  $\Rightarrow$  値が変化しない  $\Rightarrow$  全エネルギーが保存される

エネルギー保存則 (Law of the conservation of energy)

# 保存量

---

- ▶ エネルギーのように、外力 = 0の下で、自然な動きに沿ってその値を保ち続ける量を**保存量(conservative quantity)**あるいは第1積分(first integral)という。
- ▶ 保存量を持つ動的システムを保存系(conservative system)という。
- ▶ 一般的な保存量の例
  - エネルギー(ハミルトニアン)  $H(p(t), q(t)) = \text{const.}$
  - 運動量ベクトル
  - 角運動量ベクトル

# 時空の変換と対称性

---

- ▶ 時間と一般化座標の変換(パラメータ  $\epsilon$  に沿って滑らかに変化する):

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon T$$

$$q(t) \rightarrow q_\epsilon(t') = \varphi(q(t), \epsilon) = \varphi(q(t - \epsilon T), \epsilon)$$

ただし、 $\varphi(q, 0) = q$ 。

- ▶ 作用  $S$  がこの変換に関して不変ならば、系は対称性(symmetry)を持つという。

変換後の作用積分:

$$S_\epsilon = \int_{t_I + \epsilon T}^{t_F + \epsilon T} L(q_\epsilon(t'), \dot{q}_\epsilon(t'), t') dt'$$

対称性を持つとは: 任意の  $t_F, t_I$  について

$$\frac{\partial S_\epsilon}{\partial \epsilon} = 0$$

# 対称性を持つならば(1)

- ▶ 特に微小変動  $\epsilon \approx 0$  のとき

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= [L(q(t), \dot{q}(t), t)T]_{t_I}^{t_F} \\ &+ \int_{t_I}^{t_F} \left. \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q_\epsilon(t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}_\epsilon(t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} dt = 0 \end{aligned}$$

- ▶ 積分の中は、オイラー・ラグランジュ方程式より  $\frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right)$  と一致。

- ▶ また、

$$\left. \frac{\partial q_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -T\dot{q} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

## 対称性を持つならば(2)

▶ 最終的に

$$\left. \frac{\partial S_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left[ \left( L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} \Big|_{t_I}^{t_F} = 0$$

▶ 任意の  $t_F, t_I$  について成り立つので、

$$\left( L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \text{const.}$$

保存量



# ネーターの定理

▶ ネーターの定理 (Noether's theorem):

オイラー・ラグランジュ系が対称性を持つならば、それは保存系で、保存量

$$\left( L(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$$

が存在する。

▶ 例:

- ✓ エネルギー保存則: 時間の並進対称性 = ラグランジアンが時間に依存しない
- ✓ 運動量保存則: 空間の並進対称性
- ✓ 角運動量保存則: 空間の回転対称性

▶ 場の理論にも適用可能。