11.状態空間でのシステム結合

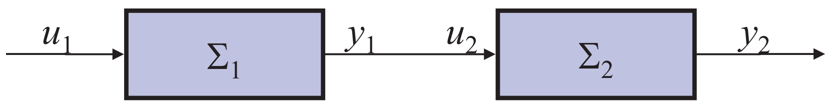
教科書 6.5,6.6

直列結合の場合(1)

- 伝達関数表現では「直列結合 = 伝達関数の掛け算」であった。

では、それを状態空間で表すとどうなるであろうか?

- 直列結合 (カスケード接続)



$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

- $u_2 = y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1$を考慮すると、

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + D_1 u_1) = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 + B_2 D_1 u_1 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + D_1 u_1) = D_2 C_1 x_1 + C_2 x_2 + D_2 D_1 u_1 \end{cases}$$

よって、直列結合系は

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_2 = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D_2 D_1 u_1 \end{cases}$$

直列結合の場合(2)

- Σ_1とΣ_2はそれぞれ単独では可制御・可観測とする。
- 1入力1出力系の場合、Σ_1の伝達関数$G_1(s)$とΣ_2の伝達関数$G_2(s)$ が、

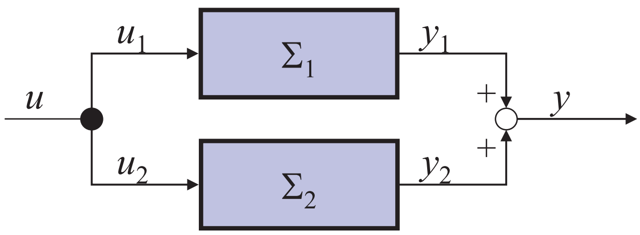
$$G_1(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}, \qquad G_2(s) = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$$

となるとき(それぞれ既約と仮定)、掛け算で極ゼロ相殺するなら、状態空間での直列結合系は不可制御か不可観測。

- $n_1(s)$と$d_2(s)$が極ゼロ相殺するなら、直列結合系は不可制御。
- $d_1(s)$と$n_2(s)$が極ゼロ相殺するなら、直列結合系は不可観測。

並列結合の場合(1)

- 伝達関数では、「並列結合 = 伝達関数の足し算」



$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

- $u_1 = u_2 = u$ および $y = y_1 + y_2$ より、結合系は、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (D_1 + D_2) u \end{cases}$$

並列結合の場合(2)

- Σ_1とΣ_2はそれぞれ単独では可制御・可観測とする。
- 1入力1出力系の場合、Σ_1の伝達関数$G_1(s)$とΣ_2の伝達関数$G_2(s)$ が、

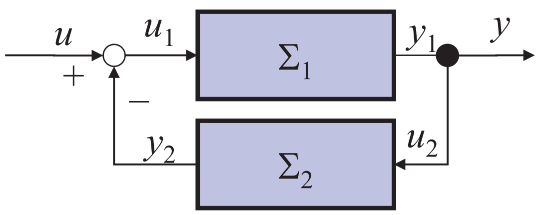
$$G_1(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}, \qquad G_2(s) = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$$

となるとき(それぞれ既約と仮定)、足し算して通分したときに次元がおちれば、不可制御かつ不可観測。

- つまり、$d_1(s)$と$d_2(s)$に共通因子があるならば、並列結合系は、可制御でも可観測でもない。

出力フィードバック系の場合(1)

- 出力フィードバック系 (センサーダイナミクス付き):



$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

- $u_1 = u - y_2 = u - C_2 x_2$ および $u_2 = y = y_1 = C_1 x_1 - D_1 C_2 x_2 + D_1 u$より、この結合系の状態変数表現は、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 - B_2 D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & -D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D_1 u_1 \end{cases}$$

出力フィードバック系の場合(2)

- Σ_1とΣ_2はそれぞれ単独では可制御・可観測とする。
- 1入力1出力系の場合、Σ_1の伝達関数$G_1(s)$とΣ_2の伝達関数$G_2(s)$ が、

$$G_1(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}, \qquad G_2(s) = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$$

となるとする(それぞれ既約と仮定)。

- そのとき、$n_1(s)$と$d_2(s)$に共通因子があるならば、この出力フィードバック系は、可制御でも可観測でもない。