9. オブザーバ

教科書 7.2,7.3

出力フィードバック

- 制御対象:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

- 静的な出力フィードバック

$$u = Ky$$

(状態フィードバックと異なり、全ての極を指定できない)

- 動的な出力フィードバック

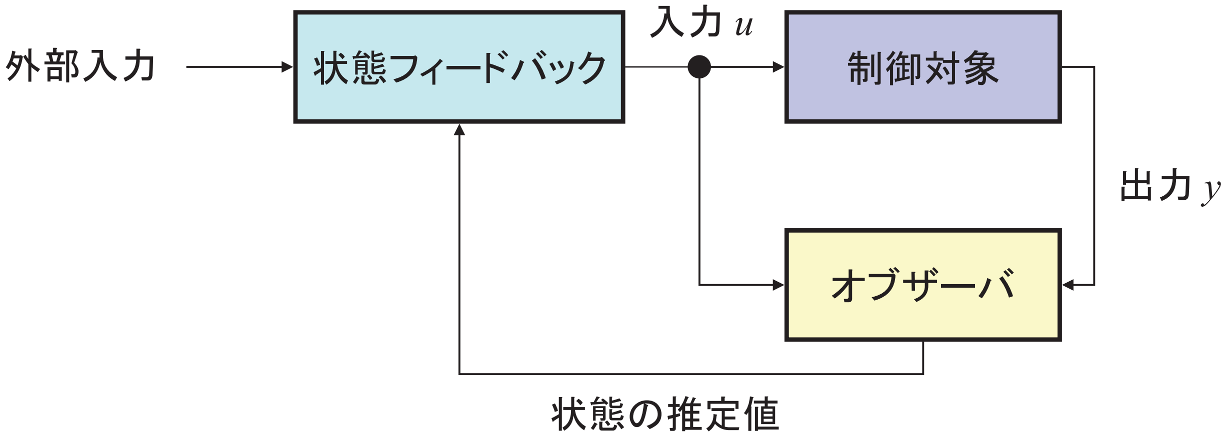
$$\dot{\xi} = P\xi + Qu + Ry$$
$$u = K_1\xi + K_2 y$$

可制御・可観測なら全ての極を指定できる

動的な出力フィードバックを作る方法
→「状態フィードバック」+「オブザーバ」

オブザーバとは

- オブザーバ(状態推定器)とは、状態 x が直接観測できないとき、出力 y と入力 u から状態 x を推定する機構。
- 出力の次元は状態の次元より少ないのが普通 → 出力の瞬間値だけからでは、状態は推定できない。
- そこで、過去の履歴の情報も用いる。つまり、オブザーバ自体も微分方程式で表現される。→ 動的フィードバック



同一次元オブザーバ

- 制御対象

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- 状態を推定するために、制御対象のコピーを作る。

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu$$
$$\tilde{y} = C\tilde{x} + Du$$

$\tilde{x}$ は、x の推定値

- このままでは、初期推定誤差がゼロに収束する保証がない。そこで、出力の差

$$\tilde{y} - y = C\tilde{x} + Du - y$$

により、制御対象のコピーの動きを修正。

同一次元オブザーバ

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K(C\tilde{x} + Du - y)$$
$$\tilde{y} = C\tilde{x} + Du$$

推定誤差

- 推定誤差:

$$e = x - \tilde{x}$$

- 推定誤差のダイナミクス

$$\begin{aligned}\dot{e} &= [Ax + Bu] - [A\tilde{x} + Bu + K(C\tilde{x} + Du - y)] \\ &= A(x - \tilde{x}) + KC(x - \tilde{x}) \\ &= (A + KC)e\end{aligned}$$

$A+KC$ が安定ならば、推定誤差はゼロに漸近

オブザーバの固有値

- オブザーバの固有値 = $A+KC$ の固有値
- K を選ぶことで、オブザーバの固有値を自由に選べるだろうか?
- $A+KC$ の固有値 = $(A+KC)^T$ の固有値 = $A^T + C^T K^T$の固有値
- 双対なシステムの極配置問題

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$

$$v = K^T z$$

K^T を選ぶことで $A^T + C^T K^T$ の固有値を自由に選べるか?
→ 元の系のオブザーバの固有値配置問題と同じ

- 「双対なシステムの極配置問題」と等価
= 必要十分条件は双対なシステムの可制御性
つまり、

オブザーバの固有値配置が自由にできる必要十分条件は可観測であること

オブザーバの固有値配置

- 可観測正準形で表されているとする。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

- 誤差システム:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 + k_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} + k_n \end{bmatrix} e$$

多項式$s^n + (a_{n-1} - k_n)s^{n-1} + \ldots + (a_0 - k_1)$が目標の特性多項式になるように $K = (k_1,\ldots,k_n)^T$ を選ぶ

フィードバック系

- 制御対象: $\dot{x} = Ax + Bu$
  $y = Cx + Du$
- 状態フィードバックを設計: $u = Fx$
  $\rightarrow$ $A + BF$ が望ましい固有値を持つように設計
- オブザーバを設計
  $\rightarrow$ $A + KC$ が望ましい固有値を持つように設計
- この2つを組み合わせる。つまり、$u = Fx$のかわりに、推定値を用いて、
  $u = F\tilde{x}$
- 推定値を用いることで、$A + BF$ の固有値が変化しないであろうか?
  $\rightarrow$ 結論としては、「問題ない」(次のページ参照)

分離定理

- 拡大系

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A+KC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- つまり、フィードバック系の固有値は、$A+BF$ の固有値と $A+CK$の固有値をあわせたもの。
- オブザーバの設計とは独立に、状態フィードバックの設計を行ってよい。

  → 制御と観測の分離 = 分離定理
- 線形系だから分離定理が成り立っている。非線形系では成り立たない。

最小次元オブザーバとは (教科書にはない)

- 全状態オブザーバは、n 個の状態を推定。しかし、$y = Cx$ により状態の一部は既にわかっているはず。
- 状態を推定するためには、$n - l$ 本の微分方程式でよいのでは?

↓

最小次元オブザーバ

- ただし、特殊な場合を除き、ほとんど使われない。
  - プログラミング上、次元を減らすことにあまり意味はない。
  - 観測ノイズの影響を受けやすくなる。

最小次元オブザーバの構成 (1)

1出力の場合の最小次元オブザーバについて述べる。

- 制御対象は可観測正準形で表されているとする。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

- それをさらに座標変換

$$w = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & s_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & s_1 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} x = Qx$$

最小次元オブザーバの構成 (2)

- 座標変換後のシステム

$$\dot{w} = A_1 w + B_1 u$$

$$y = C_1 w$$

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & & & -s_{n-1} & -s_1 s_{n-1} - a_n + a_1 s_{n-1} \\ 1 & \ddots & & \vdots & -s_1 s_{n-2} - a_{n-1} + a_1 s_{n-2} + s_{n-1} \\ & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -s_1 & -s_1^2 - a_2 + a_1 s_1 + s_2 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 + s_1 \end{array}\right]$$

$$C_1 = CQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = QB$$

- 変換後の状態wの最後の要素はyそのものであるので、次のようにおく。

$$w = \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}$$

最小次元オブザーバの構成 (3)

- 同一次元オブザーバを作ると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}A_2 & E_2\\ \hline 0\cdots 0\,1 & -a_1+s_1\end{array}\right]\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_2\\ b_1\end{pmatrix}u$$

- 最後の要素yは推定する必要が無いので、上の$n-1$本の式を抜き出す

最小次元オブザーバ:

$$\dot{\tilde{\xi}}=A_2\tilde{\xi}+B_2u+E_2y$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0 & & & -s_{n-1}\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ & & 1 & -s_1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}-s_1s_{n-1}-a_n+a_1s_{n-1}\\ -s_1s_{n-2}-a_{n-1}+a_1s_{n-2}+s_{n-1}\\ \vdots\\ -s_1^2-a_2+a_1s_1+s_2\end{pmatrix}$$

最小次元オブザーバの安定性

- 推定誤差 $e_\xi=\xi-\tilde{\xi}$
- 推定誤差のダイナミクス

$$\begin{aligned}\dot{e}_\xi&=\{A_2\xi+E_2y+B_2u\}-\{A_2\tilde{\xi}+E_2y+B_2u\}\\ &=A_2e_\xi\end{aligned}$$

最小次元オブザーバの安定性はA_2の安定性で決まる

$$\det[\lambda I-A_2]=\lambda^{n-1}+s_1\lambda^{n-2}+\cdots+s_{n-2}\lambda+s_{n-1}$$

が安定多項式になるように、$s_1,\ldots,s_{n-1}$ を選ぶ。