# 8. 極配置設計

教科書 7.1

## 状態フィードバックについて

- 制御対象(plant): 線形システム: $\dot{x} = Ax + Bu$

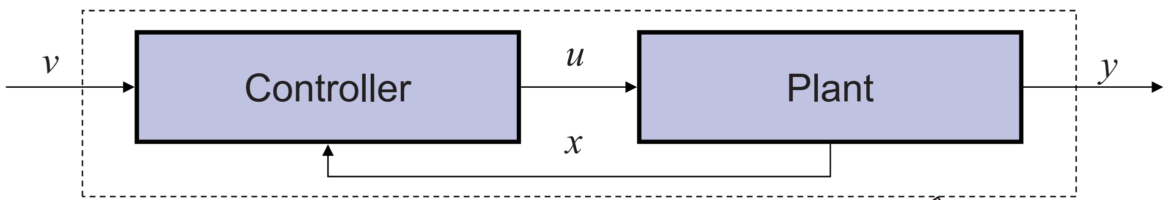
  $x \in \Re^n$ … 状態ベクトル　　$y = Cx$

  $u \in \Re^m$ … 入力ベクトル

  $y \in \Re^l$ … 出力ベクトル
- 制御則: 状態フィードバック: $u = Fx + Gv$

  $v \in \Re^k$ … 新たな入力ベクトル(通常 $k = m$)

  $F$ … $m$行$n$列行列,　$G$ … $m$行$k$列行列




拡大された系(閉ループ系)ができる

# 閉ループ系

- 制御対象: $\dot{x} = Ax + Bu$
  $y = Cx$
- 状態フィードバック: $u = Fx + Gv$

$\Downarrow$

- 閉ループ系: $\dot{x} = (A + BF)x + BGv$
  $y = Cx$

$\Rightarrow$

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}v$$
$$y = Cx$$
$$(\bar{A} = A + BF, \quad \bar{B} = BG)$$

状態フィードバックを施した後、行列 $A$ の部分が $A + BF$ のように変わる。つまり、状態フィードバックで固有値を変えることにより、システムの安定性も変わる。

# 状態フィードバックと可制御性

- 状態フィードバック則 $u = Fx + Gv$ において、$k = m$ つまり $G$ は正方行列であるとする。ここで、$G$ は正則であると仮定する。
- $u$ と $v$ は互いに変換可能

$$u = Fx + Gv \iff v = G^{-1}(-Fx + u)$$

つまり、

状態を原点に移動させる $u$ が存在 $\iff$ 状態を原点に移動させる $v$ が存在

$G$ が正則行列ならば、状態フィードバックによって可制御性は変化しない

# 状態フィードバックと可観測性

- 一方、状態フィードバックにより可観測性が変化することがある。

(例)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

可観測

状態フィードバック

$$u = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} x + v$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$
$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

不可観測

可観測性行列のランクが変わる
→ 状態フィードバックは可観測性を保存しない

# 極配置とは

- 状態フィードバックによって、$A$ の部分を $A+BF$ のように変えることができるので、システムの固有値を変えることができる。

$F$ を選ぶだけで、全ての固有値を変えることができるのであろうか?

- 極配置問題

複素数の組 $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ があらかじめ与えられている。ただし、虚数は常にその共役複素数とペアになってこの組の中に入っているものとする。このとき、行列 $A+BF$ の固有値を、$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ にするような $F$ を見つける問題を極配置問題という。

つまり、自由に $A+BF$ の固有値を指定できるかどうかの問題。

# 極配置の可解条件

極配置の可解条件は明確に得られている。

$A+BF$ **の極配置が可能であるための必要十分条件は、**システム $\dot{x}=Ax+Bu$ **が可制御**であることである。

- (必要性の証明) 対偶を証明。もし不可制御ならば、$A$ のある固有値 $\lambda_0$ に対して、$\mathrm{rank}[\lambda_0 I - A \ \vdots\ B] < n$ 。つまり、$\lambda_0$ に対する左固有ベクトル $x_0{}^T$ に対し、$x_0{}^T B = 0$。したがって、$x_0^T\{\lambda_0 I-(A+BF)\}=0$となり、$\lambda_0$ は $A+BF$ の固有値でもある。もし、不可制御ならば、固有値 $\lambda_0$ はフィードバック行列 $F$ によって変えることはできないことが証明された。
- (十分性の証明) 実際に可制御なら、極配置ができることを示す。(次ページ以降、1入力系のみ)

# 極配置設計の実際(1)

1入力系の場合の極配置について説明する。

- まず、閉ループ系に配置したい固有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ を決める。安定性を考えて、実部を負にする必要がある。収束性の観点から実部の絶対値を大きく取りたいところではあるが、そうすると入力が大きくなるなどの弊害も出てくるので、適度に選ぶ。
- 選んだ固有値を元に、閉ループ系の望ましい特性方程式を作る。

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1\lambda+\beta_0$$

- 制御対象を可制御正準系に変換する。

<u>座標変換</u>: $z=Tx$

<u>可制御正準形</u>:

$$\dot{z}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

# 極配置設計の実際(2)

- フィードバック ($z$ で表現) :

$$u = F_0 z = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \beta_0 & \cdots & \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} \end{pmatrix} z$$

- 閉ループ系:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 - \beta_0 & \cdots & \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} \end{pmatrix} z$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & \cdots & -\beta_{n-1} \end{bmatrix} z$$

閉ループ系の特性多項式の係数が、
希望の値になった。

- フィードバック:

$$u = F_0 z = (F_0 T) x = Fx$$

$F = F_0 T$ が求める
フィードバック係数

# アッカーマン法

- 可制御正準形を経由する方法と等価の方法 = アッカーマン法 (簡単!)

$$u = Fx$$

$$F = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad -1] G_C^{-1} P(A)$$

- $Gc$は可制御性行列
- $P(A)$は、目標の特性多項式 $P(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1 \lambda + \beta_0$
に形式的に$A$を代入したもの。

$$P(A) = A^n + \beta_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \beta_1 A + \beta_0 I$$

- 可制御正準形を経由しなくてもよい。

# その他の方法(1)

- 1入力系で、$B$行列 (1入力系なので実際は列ベクトル)の非ゼロ要素が1つだけの場合は、「フィードバック係数を未定定数にして、項別比較」の方法が使える。

$F=(f_1,\ldots,f_n)$ と置く ⇨ $\det(sI-(A+BF))$ を計算

⇨ 多項式の各係数が$f_i$の1次式

⇨ 目標の多項式と項別比較をして、$f_i$の1次方程式を解く

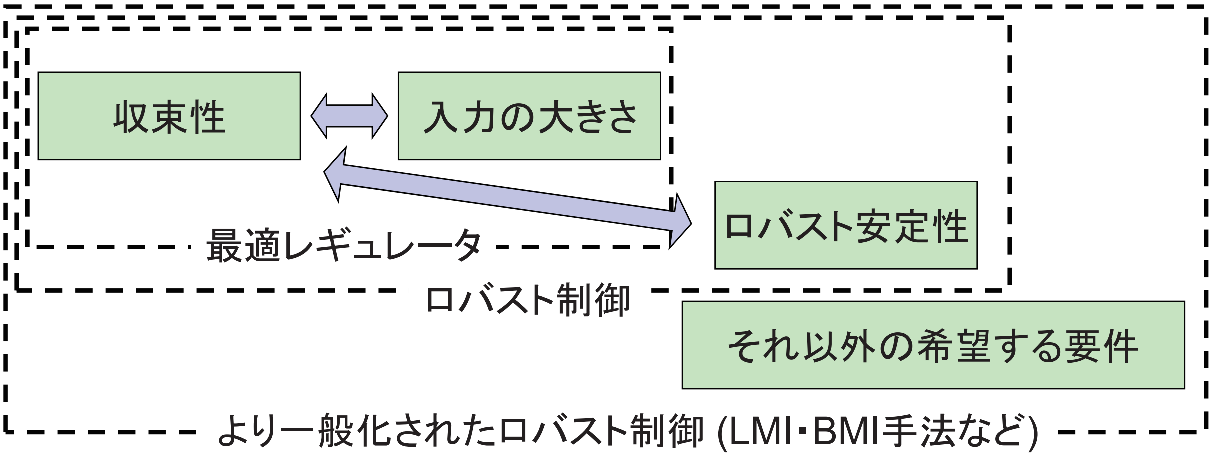
- $B$行列の非ゼロ要素が2つ以上の場合、教科書68pには、座標変換で「非ゼロ要素を1つ」にする方法が載っているが、それするならアッカーマン法のほうが手軽。

# その他の方法(2)

- 2入力以上の場合に使う、木村・疋田の方法が教科書のp69に載っている。
- ただし、2入力以上の場合は「極配置法」ではなく、後で述べる最適レギュレータで安定化したほうが良いと思われる。

# 係数 $\beta$ の選択について

- 収束性の観点から実部の絶対値を大きく取りたい。
- しかし、それを大きくとると入力が大きくなるなどの弊害も出てくる。
- また、システムが変動した場合の安定性の保持に関しても問題が出てくる。(ロバスト安定性)




- 高度な制御(advanced control)手法は、授業で触れられないが、たくさんある。