

5. 可制御性・可観測性

教科書 5章
部分的に7章参照

入出力付きシステム

- 入出力付きシステム:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

x ... 状態ベクトル ($\in \mathbb{R}^n$)

u ... 入力ベクトル ($\in \mathbb{R}^m$)

y ... 出力ベクトル ($\in \mathbb{R}^l$)

A ... $n \times n$ 行列, B ... $n \times m$ 行列, C ... $l \times n$ 行列, D ... $l \times l$ 行列

- 通常、 $D=0$ のケース(直達項が無い場合)を考えることが多い。
 $D \neq 0$ でも、 $y' = y - Du$ という仮想的な出力を考えればよい。

解の公式 (再掲)

- システム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

の解

- $x(t)$ を求める公式:

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

- $y(t)$ を求める公式:

$$y(t) = Ce^{tA}x(0) + Du(t) + C \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

可制御性・可観測性の概念

- 入力 u を直接操作し、システムの状態 x を狙ったように動かすことが、「制御」
- 制御すべき x が出力 y から「観測」できることが前提。

- システムの状態を入力で動かすことができるか? ... 可制御性
- システムの状態を出力から推定することができるか? ... 可観測性

「安定性との関連」

もし、可制御でなければ、系を安定化できないかも...

もし、可観測でなければ、出力を安定化しても系の内部状態は発散するかも。

可制御ではない/可観測ではない系とは

- 可制御でない系とは....

たとえば、座標変換で次のような形になるシステム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & | & A_2 \\ \hline 0 & | & A_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_3 x_2 \end{aligned}$$

閉じているシステム

- 可観測でない系とは....

たとえば、座標変換で次のような形になるシステム

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_1 & | & 0 \\ \hline A_2 & | & A_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \ | \ 0] x + Du \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_1 + A_3 x_2 + B_2 u \\ y &= C_1 x_1 + Du \end{aligned}$$

x_2 の影響を受けない

x_1 だけが見える

可制御性の定義

- 任意の初期点 x_s から、原点に有限時間内に到達可能な入力 $u(t)$ が存在すれば、システムは可制御であるという。
- 原点から、任意の点 x_f に有限時間内に到達する入力 $u(t)$ が存在すれば、システムは可到達であるという。
- 連続時間線形系では、
(可制御性) = (可到達性)
- ただし、離散時間線形系(コースによっては3年前期授業で習うはず)では、
(可制御な系) \supset (可到達な系)

可観測性の定義

- ある時間 t_f が存在して、 $0 \leq t \leq t_f$ の入出力のデータから、システムの初期値 x_0 を一意に定めることが出来るとき、システムは可観測であるという。
- 系の線形性より、
「入力が 0 のとき、ある時間 t_f が存在して、 $0 \leq t \leq t_f$ の出力のデータから、システムの初期値 x_0 を一意に定めることが出来るとき、システムは可観測であるという。」
と言い換えても良い。

可制御性の条件

[定理] 以下の4つの条件は等価である。

- システム $\dot{x} = Ax + Bu$ が可制御である。
- 可制御性行列がフルランクすなわち

$$\text{rank } G_C = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

となること。(条件1)

重要!

- 可制御性グラミアン

$$W_C(t) = \int_0^t (e^{-z\tau} B)(e^{-z\tau} B)^T d\tau = \int_0^t e^{-z\tau} B B^T e^{-z\tau} d\tau$$

が正則であること。(条件2)

- すべての複素数 λ に対して、

$$\text{rank} [\lambda I - A \mid B] = n$$

となること。(条件3)

条件2の十分性

$W_c(t_1)$ が正則とする。

そのとき、任意の x_1 に対し、入力 $u(t) = -(e^{-tA}B)^T W_c(t_1)^{-1}(x_0 - e^{-t_1A}x_1)$ が存在し、

$$\begin{aligned}x(t_1) &= e^{t_1A}x_0 - \int_0^{t_1} e^{(t_1-\tau)A} B(e^{-\tau A}B)^T W_c(t_1)^{-1}(x_0 - e^{-t_1A}x_1) d\tau \\ &= e^{t_1A}x_0 - e^{t_1A} \int_0^{t_1} (e^{-\tau A}B)(e^{-\tau A}B)^T d\tau \cdot W_c(t_1)^{-1}(x_0 - e^{-t_1A}x_1) \\ &= e^{t_1A}x_0 - e^{t_1A}(x_0 - e^{-t_1A}x_1) = x_1\end{aligned}$$

となる。

(条件2) → 可制御性

条件2の必要性

t を固定する。 $W_c(t)$ が正則でないなら、非ゼロベクトル z が存在して、 $W_c(t)z = 0$ 。
よって、

$$z^T W_c(t) z = \int_0^t \|z^T e^{-\tau A} B\|^2 d\tau = 0$$

となり、 $z^T e^{-\tau A} B = 0$ ($0 \leq \tau \leq t$)。一方、可制御だと仮定すると、入力 $u(\tau)$ が存在し、初期状態 z から、0に移すことができる。

$$0 = e^{tA} z + \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau \Rightarrow z = -\int_0^t e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau$$

したがって、

$$\|z\|^2 = z^T z = -\int_0^t z^T e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau = 0$$

となるが、これは矛盾であり、可制御ならば W_c は正則でなくてはならない。

可制御性 → (条件2)

条件1の十分性

条件2が成り立たないとすると、 $s(\tau) = z^T e^{-\tau A} B = 0$ ($0 \leq \tau \leq t$)。これは恒等式なので、何回微分しても0。

$$s(0) = z^T B = 0$$

$$-\dot{s}(0) = z^T AB = 0$$

$$\ddot{s}(0) = z^T A^2 B = 0$$

$$(-1)^{n-1} (ds^{n-1} / d\tau)(0) = z^T A^{n-1} B = 0$$

これをまとめると、

$$z^T [B \mid AB \mid A^2 B \mid \cdots \mid A^{n-1} B] = 0$$

よって、可制御性行列のランクは $n-1$ 次以下である。これの対偶をとれば、条件1が成り立つならば条件2が成り立つことがいえる。

(条件1) \rightarrow (条件2)

条件1の必要性

可制御性行列がフルランクでないとすると、非ゼロのベクトル z が存在し、

$$z^T [B \mid AB \mid A^2 B \mid \cdots \mid A^{n-1} B] = 0$$

となり、ケーリー・ハミルトンの定理より、 $z^T B = 0, z^T AB = 0, z^T A^2 B = 0, \dots$ 。

行列指数関数の定義より、 $z^T e^{-tA} B = 0$ 。

すると、

$$\int_0^t (z^T e^{-\tau A} B)(z^T e^{-\tau A} B)^T d\tau = z^T W_c(t) z = 0$$

となり、 $W_c(t)$ は準正定行列なので、可制御性グラミアンは非正則となる。これの対偶を取ると、条件2が成り立つならば条件1が成り立つことがいえる。

(条件2) \rightarrow (条件1)

座標変換と可制御性

元のシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

座標変換: $z = Tx$



変換後のシステム

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u$$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB$$

- 元のシステムの可制御性の条件:

$$\text{rank}[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] = n$$

- 変換後のシステムの可制御性の条件:

$$\text{rank}[\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \bar{A}^2\bar{B} \mid \dots \mid \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = n$$

「可制御性は、座標変換に対して不変」

$$\begin{aligned} [\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \bar{A}^2\bar{B} \mid \dots \mid \bar{A}^{n-1}\bar{B}] &= [TB \mid TAB \mid TA^2B \mid \dots \mid TA^{n-1}B] \\ &= T[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] \end{aligned}$$

可観測性の条件

次の4つの条件は同値である。

- システム $\dot{x} = Ax, y = Cx$ は、可観測である。
- ランク条件

$$\text{rank } G_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

重要!

を満たす。(条件1)

- 可観測性グラミアン

$$W_o(t) = \int_0^t e^{zA} C^T C e^{zA} d\tau$$

が正則。(条件2)

- 全ての複素数 λ に対して、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

となる。(条件3)

条件2と可観測性の等価性の証明

$y(t) = Ce^{tA}x_0$ の左から $(Ce^{tA})^T$ を掛けて積分すると、

$$\int_0^t (Ce^{\tau A})^T y(\tau) d\tau = W_o(t)x_0$$

よって、 $W_o(t)$ が正則ならば、

$$x_0 = W_o(t)^{-1} \int_0^t (Ce^{\tau A})^T y(\tau) d\tau$$

と x_0 が決定できる。(十分性の証明終わり)

逆に $W_o(t)$ が非正則ならば、非零のベクトル z が存在して、 $W_o(t)z = 0$ となる。

$$z^T W_o(t)z = \int_0^t (Ce^{\tau A}z)^T (Ce^{\tau A}z) d\tau = \int_0^t \|Ce^{\tau A}z\|^2 d\tau = 0$$

であるから、 $Ce^{t'A}z = 0$ ($0 \leq t' \leq t$)。これは、初期値が z であるときに、出力が恒等的にゼロであることを意味しており、初期値が原点にある場合と区別できず、可観測性が成り立たない。(必要性の証明終わり)

可観測性グラミアンが正則(条件2) \iff 可観測性

条件1の十分性の証明

$W_o(t)$ が非正則なら、非零ベクトル z が存在し、 $s(t) = Ce^{tA}z = 0$ ($0 \leq t \leq t$)。

$$s(0) = Cz = 0, \quad \dot{s}(0) = CAz = 0, \quad \ddot{s}(0) = CA^2z = 0, \dots$$

$$(d^{n-1}s/dt^{n-1})(0) = CA^{n-1}z = 0$$

よって、

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} z = 0$$

となり、可観測性行列のランクは n 未満である。この対偶を取ると、条件1の十分性がいえる。

(条件1) \rightarrow (条件2)

条件1の必要性

可観測性行列のランクが n 未満であると仮定すると、非ゼロのベクトル z が存在して、

$$z^T [C^T \mid (CA)^T \mid \cdots \mid (CA^{n-1})^T] = 0$$

となる。ケイリー・ハミルトンの定理より、 $Cz = 0, CAz = 0, CA^2z = 0, \dots$ がいえる。したがって、 $Ce^{At}z = 0 \ (\forall t \geq 0)$ となり、これより、

$$\int_0^t \|Ce^{\tau A}z\|^2 d\tau = \int_0^t z^T e^{\tau A} C^T Ce^{\tau A} z d\tau = z^T W_o(t) z = 0$$

となり、可観測性グラムは非正則となる。この対偶をとると、条件1の必要性がいえる。

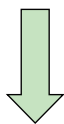
(条件2) \rightarrow (条件1)

可観測性と座標変換

- 可制御性と同様に、**可観測性も座標変換に関して不変**である。
- このことを確かめる。

システム:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$



座標変換: $z = Tx$

可観測性行列:

$$\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

変換後のシステム:

$$\dot{z} = \bar{A}z, \quad y = \bar{C}z$$

$$(\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{C} = CT^{-1})$$

変換後の可観測性行列:

$$\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \hline \bar{C}\bar{A} \\ \hline \vdots \\ \hline \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT^{-1} \\ \hline CAT^{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1}T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix} T^{-1}$$

ランクが一致

双対システム

- システム

$$(\Sigma 1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

に双対なシステム:

$$(\Sigma 2) \begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T u \\ y = B^T z + D^T u \end{cases}$$

- $(\Sigma 1)$ が可制御 \longleftrightarrow $(\Sigma 2)$ が可観測
- $(\Sigma 1)$ が可観測 \longleftrightarrow $(\Sigma 2)$ が可制御
- 双対システムの意味は、後で習う伝達関数を計算すれば明らかになる。
- 1入力1出力系の場合、双対システムは同じ「入出力関係」を持つ。

双対システムと座標変換

元のシステム

$$(\Sigma 1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

座標変換

$$\bar{x} = Tx$$



$$(\Sigma 1)' \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$
$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB,$$
$$\bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

双対システム

$$(\Sigma 2) \begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T u \\ y = B^T z + D^T u \end{cases}$$

座標変換

$$\bar{z} = (T^T)^{-1} z$$



$$(\Sigma 2)' \begin{cases} \dot{\bar{z}} = \bar{A}^T \bar{z} + \bar{C}^T u \\ y = \bar{B}^T \bar{z} + \bar{D}^T u \end{cases}$$
$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB,$$
$$\bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

可制御正準分解 (教科書にはない)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = r < n$$

となっているとしよう。すると、 $(n-r) \times n$ 行列 P が存在し、

$$P \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

となる。ただし、 $\text{rank } P = n - r$ である。ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$PA \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

が成り立つから、 $(n-r) \times (n-r)$ 正則行列 A_3 が存在して、 $PA = A_3P$ と書ける。

ここで、 $z_2 = Px$ とおくと、

$$\dot{z}_2 = PAx + PBu = PAx = A_3Px = A_3z_2$$

次の座標変換を考える。

$$z = Tx = \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} x$$

ただし、 $\text{rank } T = n$ となるように Q をとる。すると、変換後のシステムは、

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

の形になる。(可制御正準分解)

可制御正準分解されたシステム

- 可制御正準分解されたシステム:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \bar{A}z + \bar{B}u = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- 動かせる/動かせない「変数」(係数空間; 行ベクトル空間)

- $z_1 \dots$ 可制御な状態変数 (一意ではない)

- $z_2 \dots$ 不可制御な状態変数

(z_2 同士の座標変換の自由度を除いて一意に決まる)

- 一方、列ベクトル空間(動かせる「方向」)では、可制御空間(可制御なモード)が一意で、不可制御なモードは一意に決まらない。

- 可制御正準分解されたシステムの可制御性行列

$$\begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & A_1^2B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

上の r 行はフルランク

可観測正準分解 (教科書にはない)

$$\text{rank} \left[C^T \mid (CA)^T \mid \cdots \mid (CA^{n-1})^T \right] = r < n$$

とする。すると、 $r \times n$ フルランク行列 P と $nl \times r$ フルランク行列 K が存在し、

$$KP = \left[C^T \mid (CA)^T \mid \cdots \mid (CA^{n-1})^T \right]^T$$

とできる。ただし、 l は出力の次元。ケーリー・ハミルトンの定理より、 $r \times r$ 正則行列 L が存在して、 $KPA = KLP$ となる。 K はフルランクなので、 $PA = LP$ 。

次に、座標変換 $z = Tx$ (T は正則) を考える。ここで、 T は

$$T = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \text{ の形をしているものとする。} T^{-1} = [R \mid S] \text{ とすると、} PS = 0 \text{ となる。}$$

ただし、 S は $n \times (n-m)$ 行列。座標変換後のシステムを、

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & \Gamma \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [C_1 \mid \Delta] z$$

とおくと、 $\Gamma = PAS = LPS = 0$, $\Delta = CS = K_1PS = 0$ 。ただし、 K_1 は K の最初の l 行を取り出した行列。

可観測正準分解:
$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [C_1 \mid 0] z$$

可観測正準分解されたシステム

● 可観測正準分解されたシステム:
$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \bar{A}z + \bar{B}u = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \bar{C}z = [C_1 \mid 0] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

- 観測できる/できない「変数」(係数空間; 行ベクトル空間)

- $z_1 \dots$ 可観測な状態変数

(z_1 同士の座標変換の自由度を除いて一意に決まる)

- $z_2 \dots$ 不可観測な状態変数 (一意には決まらない)

- 一方、観測できる(できない)動きの「方向」(列ベクトル空間)では、不可観測なモードの方が一意で、可観測なモードは一意でない。

- 可観測正準分解されたシステムの可観測性行列

$$\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_1 A_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

可制御正準形 (重要, 問題7.1参照)

- 1入力で可制御なシステム $\dot{x} = Ax + bu$ を考える。
- $p[b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)$ となる、ベクトル p を考える。
もし $p = 0$ ならば可制御性と矛盾するので、 p は非ゼロベクトルである。
座標変換行列

$$T = \begin{bmatrix} p \\ pA \\ \vdots \\ pA^{n-1} \end{bmatrix}$$

変換後の
可制御性行列

を考えると、

$$\text{rank}\{T[b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]\} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & * \\ & \ddots & * & * \\ 1 & & * & * \end{bmatrix} = n$$

であるから T は正則行列。

可制御正準形 (続き)

$z = (z_1, \dots, z_n)^T = Tx$ とおくと、

$$\dot{z}_1 = p(Ax + bu) = pAx = z_2$$

$$\dot{z}_2 = pA(Ax + bu) = pA^2x = z_3$$

⋮

$$\dot{z}_{n-1} = pA^{n-2}(Ax + bu) = pA^{n-1}x = z_n$$

$$\dot{z}_n = pA^{n-1}(Ax + bu) = pA^n x + pA^{n-1}bu$$

$$= p(-\alpha_0 I - \alpha_1 A - \dots - \alpha_{n-1} A^{n-1})x + pA^{n-1}bu$$

$$= -\alpha_0 z_1 - \alpha_1 z_2 - \dots - \alpha_{n-1} z_n + u$$

ただし、 α_i は A の特性多項式の係数で、
 $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

ケーリー・ハミルトンの定理

可制御正準形:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

重要!

可観測正準形 (教科書にはないが重要)

- 可制御正準形の相対システムを考える。
- 元のシステム (1出力・可観測なシステム):

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = cx$$

- 座標変換:

$$z = Tx = \begin{bmatrix} s & As & \cdots & A^{n-1}s \end{bmatrix}^{-1} x$$

s は非ゼロベクトルで、 $\begin{bmatrix} c^T & (cA)^T & \cdots & (cA^{n-1})^T \end{bmatrix} s = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)^T$

- 可観測正準形:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z + TBu$$
$$y = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)z$$

コンパニオンフォーム

- コンパニオンフォーム (コンパニオン形式):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{あるいは、} \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

- コンパニオンフォームの行列の特性多項式は、

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

可制御・可観測正準形の役割

- 可制御(可観測)ならば、1通りに定まる。
正準形(canonical form)という言い方ではなく「標準形」ということもある。
- 正準形では、特性多項式の係数が現れる。
- 可制御正準形は、極配置などで使われる。
- 可観測正準形は、オブザーバ設計などで使われる。
- その他、正準形が使われる局面は多い。

しかし、...

- 正準形を計算機で扱うとき、数値誤差がたまりやすいことが多々ある。
理論は正準形で考えたほうが都合が良くても、実際の計算は正準形を経由しないほうが良い場合が多い。