# 4. システムの安定性

教科書4章
12.2

## 安定性の定義

- 自律系(外部からの入力を含まない時不変システム)

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{ただし } f(0) = 0$$

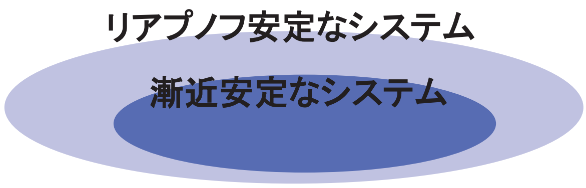
  の(局所的)安定性に関しては、以下の2つがある。

- (リアプノフ)安定性:
  これは、$\varepsilon$-$\delta$ 論法で定義される。

  **任意の $\varepsilon$ に対して $\delta$ が存在し、$\|x(0)\| < \delta$ ならば $\|x(t)\| < \varepsilon$ となるとき、平衡点 $x = 0$ は、(リアプノフ)安定であるという。**

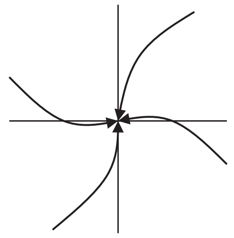
- 漸近安定性:

  **平衡点 $x = 0$ の近傍から出発した軌道がすべて平衡点 $x = 0$ に収束し、かつリアプノフ安定であるならば、平衡点 $x = 0$ は漸近安定であるという。**

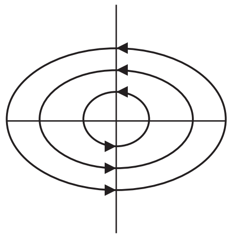



**リアプノフ安定でも
漸近安定でない
系が存在する。**

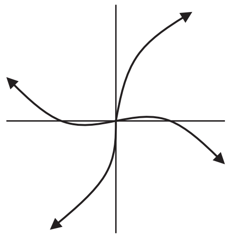
# 2つの安定性



漸近安定なシステム



中立安定な部分を含む安定なシステム



不安定なシステム

リアプノフ安定なシステム

- 漸近安定なシステム: (例)　$\dot{x} = -x, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x, \quad \text{etc...}$
- 中立安定なシステム: (例)　$\dot{x} = 0, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad \text{etc...}$
- 不安定なシステム: (例)　$\dot{x} = x, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x, \quad \text{etc...}$

# 大域的な安定性

- 局所的な安定性ではなく、全ての初期値に関する安定性。
- 大域的(リアプノフ)安定性:

**全ての初期値に対してその挙動が有界で、かつリアプノフ安定ならば、大域的(リアプノフ)安定であるという。**

- 大域的漸近安定:

**全ての初期値から出発した軌道が0に収束し、かつリアプノフ安定ならば、大域的漸近安定であるという。**

- 線形系では「大域的」な性質と「局所的」な性質は同じ。

**重要!**

$\dot{x} = Ax$　**$A$ の全ての固有値の実部が負: 大域的漸近安定**

$A$ の全ての固有値の実部が非正 (幾何学的重複度と代数的重複度が異なる固有値は負) : 大域的リアプノフ安定

(注意) 入力付きの線形系 $\dot{x} = Ax + Bu$ の安定性の定義は別である。
(その条件とは、入力無しシステムの漸近安定性と一致する。)

# 自律系の安定条件の検証(1)

- $A$ をJordan標準形に変換

$$A = T\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_N \end{bmatrix} T^{-1}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{tA} = T\begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_N} \end{bmatrix} T^{-1}, \quad e^{tJ_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & t^{d_i-1}e^{\lambda_i t}/(d_i-1)! \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

# 自律系の安定条件の検証(2)

- 時間$t$の多項式: $\psi(t)$

  $t \to +\infty$のとき$|\psi(t)| \to +\infty$。
- 指数関数: $e^{-at}$ $(\mathrm{Re}[a] > 0)$

  $t \to +\infty$のとき$|e^{-at}| \to 0$。

- 指数関数の方が強い収束 (どんな正の$a$に対しても)

  $|\psi(t)e^{-at}| \to 0 \quad (t \to +\infty)$
- つまり、すべての固有値の実部が負な行列の行列指数関数はゼロ行列に収束。
- 収束の速さも指数的

  $|\psi(t)e^{-at}| \le Me^{-ct} \quad (t \ge 0)$

 ただし、$0 < \forall c < a, \exists M > 0$。

# 自律系の安定条件の検証(3)

- よって、$A$ の固有値の実部が全て負ならば、またその時に限り、行列指数関数の各要素はゼロに漸近。
- 逆に、ひとつでも実部が正の固有値があれば、行列指数関数は発散。
- サイズ2以上のジョルダンセルに対応する固有値の実部がゼロのとき、行列指数関数は発散。($t$ が掛け算されているため)
- 逆に、ある固有値の実部がゼロのとき、その固有値に関して対角化されている(幾何学的重複度と代数的重複度が同じ)ならば、ゼロには収束しないが、有界。

以上より、3ページ前のスライドの下部の結論がいえる....とされている。
実際は、複素数に拡大したことで、必要性の証明はもう少し大変。
少し後のスライドで、詳しく述べる。

# 線形システムと解の公式(再掲載)

- 線形システム:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$x$…状態($n$次元ベクトル), $u$…入力($m$次元ベクトル), $y$…出力($l$次元ベクトル)

- 解の公式: 重要!!

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = Ce^{tA}x(0) + C\int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

# 線形系の安定性

- 入力付きのシステムの安定性について考える。
- 本講義での「入力付きシステム」の安定性の定義:

システム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

が安定であるとは、$\|u(t)\| \le M \ \ (M > 0)$ のように入力が有界であるときに、ある時間 $t_0(\|x_0\|, M)$ と関数 $\gamma(M)$ (ただし $\gamma(M) \to 0 \ (M \to 0)$)が存在し、

$$\|x(t)\| \le \gamma(M) \ (t \ge t_0)$$

となることである。

→ BIBS安定性(Bounded input-bounded state stability)とほぼ同じ

[注意] 関数 $\gamma(M)$ は、入力の大きさ $M$ のみの関数で、状態の初期値に無関係。

- このような定義は、他の本ではなされていない。適当にごまかして書いてある本が非常に多い。後で学習する伝達関数表現されたシステムに対する安定性の定義との整合性をとるためには、本講義での定義がふさわしい。

  (教科書も曖昧に書いてある。)

# 安定性の必要十分条件

- 安定性の必要十分条件を示す。

重要!

システム、

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

が安定である必要十分条件は、行列 $A$ の全ての固有値の実部が負であることである。

- 「行列 $A$ の全ての固有値が複素平面の左半平面にあること」という表現も用いられる。
- (入力無し線形システムの安定性) ≠ (入力付き線形システムの安定性)

  (入力無し線形システムの漸近安定性) = (入力付き線形システムの安定性)

  である。
- 以降では、この必要十分条件の証明を行う。

# 安定条件の十分性(その1)

- $A$ の全ての固有値の実部が負であると仮定する。

$$0 > -c > \mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\}$$

- $A$ をJordan標準形に変換する。

行列のノルムは
最大特異値

$$\|A\| = \sqrt{\max_i \lambda_i(\overline{A}^T A)}$$

$$A = T\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_N \end{bmatrix} T^{-1}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{tA} = T\begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_N} \end{bmatrix} T^{-1}, \quad e^{tJ_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & t^{d_i-1}e^{\lambda_i t}/(d_i-1)! \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|e^{tJ_i}\right\| = \psi_i(t) e^{\mathrm{Re}\{\lambda_i\}t}$$

$$\le h_i e^{-ct} \quad (t \ge 0)$$

$\psi_i(t)$ は多項式オーダの係数

$$\Downarrow$$

$$\left\|e^{tA}\right\| \le \max(h_i) e^{-ct} \|T\| \left\|T^{-1}\right\| = ke^{-ct} \quad (t \ge 0)$$

# 安定条件の十分性(その2)

解の公式より、

$$\|x(t)\| \le \left\|e^{tA}\right\| \|x_0\| + M\|B\| \int_0^t \left\|e^{\tau A}\right\| d\tau \qquad \left( \|B\| = \sqrt{\max_i \lambda_i(B^T B)} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\|x(t)\| \le k\|x_0\| e^{-ct} + ckM\|B\|(1-e^{-ct}) \quad (t \ge 0)$$

よって、

$$\gamma(M) = k(c\|B\|+1)M, \quad t_0(\|x_0\|, M) = \max\left(0, \frac{1}{c}\{\ln(\|x_0\|) - \ln(M)\}\right)$$

ととれば、$\|u(t)\| \le M$ ならば、$\|x(t)\| \le \gamma(M) \quad (t \ge t_0(\|x_0\|, M))$。

# 安定条件の必要性(その1)

- 対偶を証明。
- まず、行列 $A$ に、ある0または正の実数固有値 $\lambda$ が存在すると仮定する。その固有ベクトルを $p$ とおく。つまり、$(\lambda I - A)p = 0$。

  $A^k p = \lambda^k p$ であるから、

$$e^{tA}p = \left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots\right)p = p + \lambda t p + \frac{\lambda^2 t^2}{2!}p + \cdots = e^{\lambda t}p$$

  よって、$u(t) = 0,\ x_0 = kp$ ($k$は適当なスカラー) のとき、$\|x(t)\| = ke^{\lambda t}\|x_0\|$ となる。$\lambda$ が正ならば、$\|x(t)\|$ は発散し、$\|x(t)\|$ は有界ではない。$\lambda = 0$ のときは、$\|x(t)\| = \|x_0\|$ となるが、初期値に無関係な関数を上界として押さえることはできないので、これも条件を満たさない。

# 安定条件の必要性(その2)

- 次に、行列 $A$ が、実部が正または 0 である固有値 $\lambda = c + \omega j$ を持つとする。その固有ベクトル を $p = \eta + \xi j$ とおく。ただし、$\|\eta\| = 1,\ \|\xi\| = a,\ \langle \eta, \xi \rangle = b$。

$$A^k p = \lambda^k p,\ A^k \bar{p} = \bar{\lambda}^k \bar{p} \Rightarrow e^{tA}p = e^{\lambda t}p,\ e^{tA}\bar{p} = e^{\bar{\lambda}t}\bar{p}$$

$$e^{tA}\eta = e^{tA}(p + \bar{p})/2 = (e^{\lambda t}p + e^{\bar{\lambda}t}\bar{p})/2$$

$$= (e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t})\eta/2 + (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t})\xi j/2 = e^{ct}(\cos\omega t \cdot \eta - \sin\omega t \cdot \xi)$$

  ここで、$u(t) = 0,\ x_0 = k\eta$ のとき、

$$\|x(t)\| = ke^{ct}\sqrt{1 + \cos 2\omega t + a^2(1 - \cos 2\omega t) + 2b\sin 2\omega t}\Big/\sqrt{2}$$

$$= \frac{ke^{ct}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + a^2) + \sqrt{(1 - a^2)^2 + 4b^2}\,\sin(2\omega t + \phi)} \geq \frac{ke^{ct}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + a^2) - \sqrt{(1 - a^2)^2 + 4b^2}}$$

  となる。$a > |b|$ なので、$c$ が正ならば、$\|x(t)\|$ は発散し、$\|x(t)\|$ は有界ではない。また、$c = 0$ のときは、すべての時刻において、$k$ に無関係な関数(すなわち初期値に無関係な関数)で押さえることはできないので、これも条件を満たさない。

# 安定性の判別の基本

- $A$ の特性方程式:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

の全ての解($A$ の固有値)$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ を虚数解も含めて求め、その全ての実部が負であれば、システムは安定。

…しかし……

特性方程式を厳密に解かなければならない。状態の数 $n$ が大きいとき、
数値計算(繰り返し法) → 誤差が蓄積しやすい

- 特性方程式を解かずに、安定性を判別できないだろうか?

# ラウスの安定判別法(1)

- 特性多項式: $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$
- ラウス表:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\lambda^n & 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-6} & \alpha_{n-8} & \cdots \\
\lambda^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \alpha_{n-7} & \alpha_{n-9} & \cdots \\
\lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & & \\
\lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & & \\
\lambda^{n-4} & d_1 & d_2 & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
\lambda^0 & e_1 & & & & &
\end{array}$$

存在しない係数は0とおく

$$b_1 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - 1\cdot\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}, b_2 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - 1\cdot\alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}, b_3 = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-6} - 1\cdot\alpha_{n-7}}{\alpha_{n-1}}, \cdots$$

$$c_1 = \frac{b_1\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1}b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1\alpha_{n-5} - \alpha_{n-1}b_3}{b_1}, \ldots$$

$$\cdots$$

# ラウスの安定判別法(2)

ラウスの安定判別法: 重要!

システムが安定である必要十分条件は、
1. 特性多項式の全ての係数 $\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0$ が全て正。
2. かつ、ラウス表の第1列 $1, \alpha_{n-1}, b_1, c_1, \ldots$が全て正。

- $n=2$の場合:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^2 & 1 & \alpha_0 \\ \lambda^1 & \alpha_1 & 0 \\ \lambda^0 & \alpha_0 & \end{array}$$

安定条件: $\alpha_0>0,\ \alpha_1>0$
この条件は暗記すること

- $n=3$の場合:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & \alpha_1 \\ \lambda^2 & \alpha_2 & \alpha_0 \\ \lambda^1 & \alpha_1-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_2} & 0 \\ \lambda^0 & \alpha_0 & \end{array}$$

安定条件: $\alpha_0>0,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \alpha_1\alpha_2>\alpha_0$
この条件は暗記すること

# フルビッツの安定判別法(1)

- 特性多項式: $\det(\lambda I-A)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$　　ただし、$\alpha_n=1$。
- フルビッツ行列式:

$$H_i=\det\begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \cdots & \alpha_{n-2i+1} \\ \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \cdots & \alpha_{n-2i+2} \\ 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_{n-2i+3} \\ 0 & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_{n-2i+4} \\ \vdots & & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & \alpha_{n-i} \end{bmatrix}$$

  - 存在しない係数は 0 とおく。
  - $H_i$ は $i\times i$ 行列の行列式

# フルビッツの安定判別法(2)

- フルビッツの安定判別法: 重要!

方程式、

$$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n > 0$$

の全ての解が複素平面の左半平面にあるための必要十分条件は、

1. $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_{n-1} > 0$
2. $H_1 > 0, H_2 > 0, \ldots, H_{n-1} > 0$

の2条件が成り立つことである。

- 上記の形の方程式のうち、全ての解が複素平面の左半平面にあるものの左辺をフルビッツ多項式あるいは安定多項式という。
- ラウスの方法とあわせてラウス･フルビッツの安定判別法といい、両者は実はほとんど等価な方法である。計算量自体はラウスの方法のほうが少ない。

# リアプノフ方程式による方法(1)

- 正定対称行列: すべての非ゼロベクトル $x$ に対し、$x^T P x > 0$ となるような対称行列 $P$ を正定対称行列あるいは単に正定行列といい、$P > 0$ と表記する。
- 対称行列 $P$ が正定であるための必要十分条件は、その固有値が全て正であることである。もともと対称行列の固有値は全て実数であることに注意せよ。

- リアプノフ方程式による安定判別: (本来は重要だが、本講義ではあまり扱わない)

$n \times n$ 行列 $A$ の全ての固有値の実数部が負であるための必要十分条件は、
リアプノフ方程式:

$$PA + A^T P = -I$$

の解 $P$ ($n \times n$ 行列) が正定対称行列となることである。

- 計算機向きの方法。手で計算するにはむいていない。どちらかといえば、安定判別そのものよりも、この条件を用いて制御則を導き出すのに使われる。

# リアプノフ方程式による方法(2)

- (十分性の証明) $dx/dt = Ax$ の漸近安定性を示せばよい。

$V(x) = x^T Px$ とおくと、$V(0) = 0$, $V(x) > 0$ $(x \neq 0)$。

$$dV/dt = x^T(PA + A^T P)x = -\|x\|^2$$

なので、$x \neq 0$ ならば $V(x)$ は狭義単調減少する。したがって、

$$x \to 0 \quad (t \to \infty)$$

となる。

- (必要性の証明) $P = \int_0^\infty e^{A^T \tau} e^{A\tau} d\tau > 0$ とおく。

$$\int_t^\infty \|x(\tau)\|^2 d\tau = \int_t^\infty x^T(t) e^{A^T(\tau - t)} e^{A(\tau - t)} x(t) d\tau = x^T(t) \cdot \int_0^\infty e^{A^T \tau'} e^{A\tau'} d\tau' \cdot x(t)$$

の両辺を $t$ で微分すると、

$$-\|x\|^2 = \frac{d}{dt} x^T Px = x^T(PA + A^T P)x$$

任意の $x$ に対して成り立つので、$PA + A^T P = -I$。

# リアプノフ方程式による方法(3)

- より一般のリアプノフ方程式:

$$PA + A^T P = -Q$$

- 安定条件は、「$Q > 0$ に対して正定対称解 $P$ があること」と言い換えてもよい。

(証明) $Q > 0$ ならば、$Q = S^T R^2 S$ ($S$ は正規直交行列, $R$ は対角成分が正の対角行列) と書くことができる。一般のリアプノフ方程式に代入すると、

$$(R^{-1}SPS^T R^{-1})(RSAS^T R^{-1}) + (R^{-1}SA^T S^T R)(R^{-1}SPS^T R^{-1}) = -I$$

ここで、$P_1 = R^{-1}SPS^T R^{-1}$, $A_1 = RSAS^T R^{-1}$ とおくと、

$$P_1 A_1 + A_1{}^T P_1 = -I$$

となるが、$A$ と $A_1$ は同じ固有値を持ち、$Q = I$ の場合のリアプノフ方程式を満たすので、証明された。

- つまり、任意の $Q > 0$ を1つ選んでそれに対してリアプノフ方程式に正定対称解 $P$ があれば、漸近安定である。