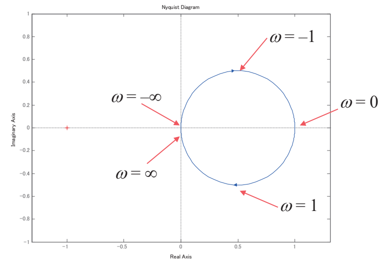
13. ナイキスト線図と安定余裕

教科書 9章

ベクトル線図

- 周波数応答 $G(j\omega)$ $(-\infty < \omega < \infty)$ を複素平面内に描いたものが、ベクトル線図である。
- 横軸が $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$、縦軸が$\mathrm{Im}[G(j\omega)]$
- [例]

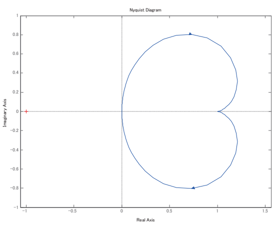
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$



ベクトル線図の例(1)

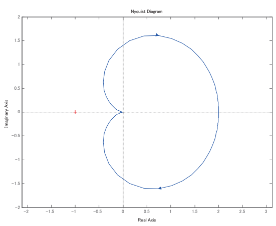
- 2次最小位相系の例 (その1):

$$G(s) = \frac{2s+s}{s^2+2s+2}$$



- 2次最小位相系の例 (その2):

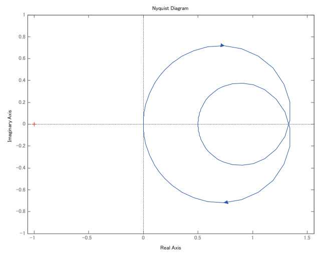
$$G(s) = \frac{4}{s^2+2s+2}$$



ベクトル線図の例(2)

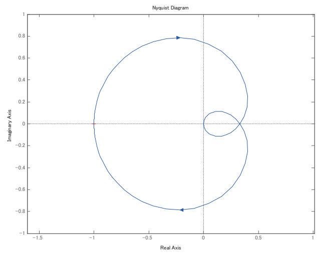
- 2次最小位相系の例 (その3):

$$G(s) = \frac{4s+1}{s^2+3s+1}$$



- 2次非最小位相系の例:

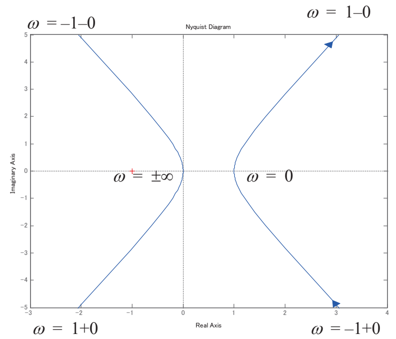
$$G(s) = \frac{s-2}{s^2+3s+2}$$



ベクトル線図の例(3)

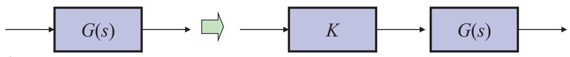
- 虚軸上に極がある場合

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+1}$$



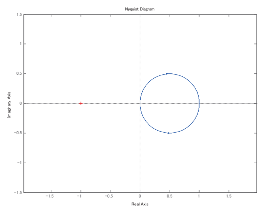
ベクトル線図のスケーリング

- 伝達関数を K 倍した場合、ベクトル線図も原点を中心に K 倍に拡大される。

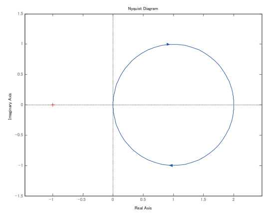


$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

<u>$K = 1$ の場合</u>

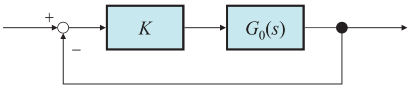


<u>$K = 2$ の場合</u>



フィードバック系の安定判別

- 下のようなフィードバック系(= 閉ループ系)の安定性の判別をしたい。



$$G(s) = \frac{KG_0(s)}{1+KG_0(s)}$$

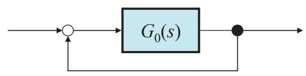
- 閉ループ系 $G(s)$ の安定性を、一巡伝達関数 $G_0(s)$ のベクトル線図から判別

ナイキストの安定判別法

- ナイキストの安定判別法のために用いる場合、「ベクトル線図」とは呼ばずに、「ナイキスト線図」という。

ナイキストの安定判別法

- まず、$K = 1$ の場合について考える。



$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$$

- $G_0(s)$ のナイキスト線図にて、$s = -1$ の点を、反時計周りに何回まわるか = N
- $G_0(s)$ の不安定な(右半平面にある)極の数 = Π
- $G(s)$ の不安定な(右半平面にある)極の数 = Z

これが知りたい

> ナイキストの安定判別法:
> $N = \Pi - Z$

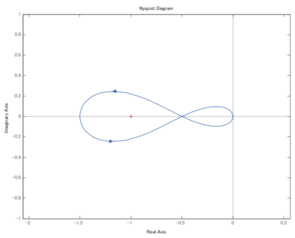
- つまり、閉ループ系が安定である条件は、$N = \Pi$。
- 特に、開ループ系 $G_0(s)$ が安定な場合($\Pi = 0$)、閉ループ系が安定である条件は $N = 0$ である。つまり、$s = -1$ の点を、ナイキスト線図が1回も回らないことである。

ナイキストの安定判別法の例

- 代表的な例: $G_0(s) = \dfrac{-s+6}{s^2+2s-4}$

1つの極が不安定 → $\Pi = 1$

- 閉ループ系が安定である条件は、ナイキスト線図が $s = -1$ の点を反時計回りに 1 回周ること。

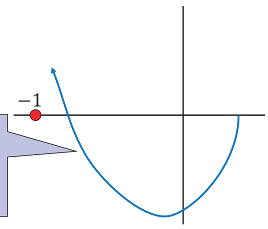


ナイキスト線図が $s = -1$ を
反時計周りに1回転しているので、
閉ループ系は安定。

自分が $s = -1$ の点に
立っていると仮定し、
ナイキスト線図が
自分の周りを何周したかを考えると
わかりやすい。

古典的なナイキストの安定判別法

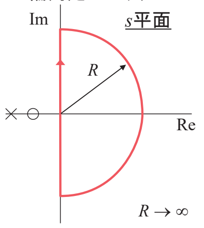
- フィードバック前の$G_0(s)$は安定と仮定し、その低周波ゲインは正($G_0(0) > 0$)とする。
- そのとき、閉ループ系の安定条件は「−1の点がナイキスト線図の外側にあること」となる。
- 基本的にはナイキスト線図は時計回り。
- 正の周波数のナイキスト線図のみ見て、
  「 −1の点を左側に見て進めば安定」

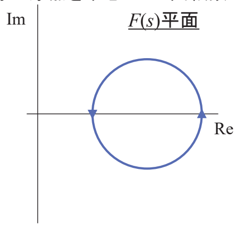


- −1の点がナイキスト線図の進行方向から見て左側なので「安定」
- このとき、−1の点はナイキスト線図の外側。

ナイキストの安定判別法の証明

- 左下の経路 C を考える
- 還送差 $F(s) = 1 + G_0(s)$ の
  (C内にある極の数) $= \Pi$
  (C内にあるゼロ点の数) $= Z$
- 偏角定理より、C の $F(s)$ への写像が原点を中心とした回転数が $\Pi - Z$ となる。

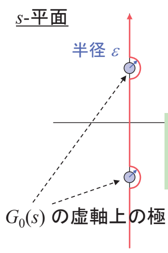




虚軸上に極がある場合

- 一巡伝達関数の極が虚軸上にあると、ナイキスト線図が無限遠点を通る。
- この場合、$s = j\omega$ $(-\infty < \omega < \infty)$ を考える代わりに、左図のような経路を考える。

[例] $G_0(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+1}$

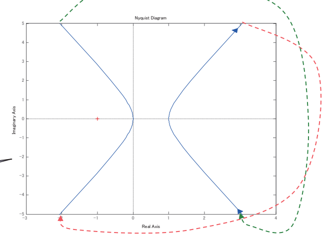


この例で、このように
経路をとる場合、
$G_0(s)$ の不安定極の数は
0 と考える。

半径 ε の
$+0$ への
極限を考える。

ナイキスト線図

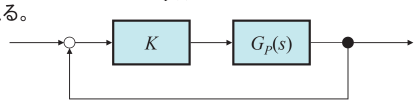
この例では、無限遠点で
以下のように回っている



0 回周っているので、安定!

ゲインを考慮したナイキストの安定判別

- 以下のように、制御対象 $G_P(s)$ の前に、ゲイン K が入っている場合の安定判別を考える。



- $G_P(s)$ のナイキスト線図を K 倍に拡大したものを考えればよいのであるが…

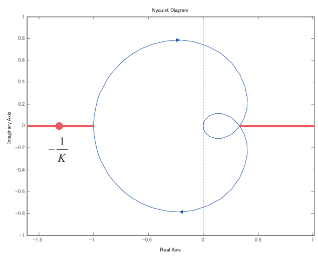
$s = -1$ の点を $1/K$ 倍したほうが楽

<u>ゲインを考慮した場合のナイキストの安定判別法:</u>
$G_P(s)$ のナイキスト線図が $s = -1/K$ の点を反時計回りに回る回数と、
$G_P(s)$ の不安定極の数が同じならば、閉ループ系は安定。

ナイキストの安定判別を用いたゲイン決定

- 以下の例を考える。 $G_P(s) = \dfrac{s-2}{s^2+3s+2}$

$G_P(s)$ の不安定極は 0 個なので、
ナイキスト線図が $s = -1/K$ を
0 回回るのが安定性の条件

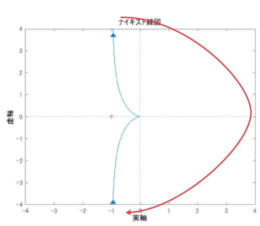


赤い部分に $-1/K$ があるならば、
ゲイン K に対して
閉ループ系は安定

閉ループ系が安定な
K の範囲は、
$-3 < K < 1$

原点s = 0に極がある場合

- 複素数平面の原点$s = 0$に極が1つある場合、それを「$G_0(s)$の安定な極」とみなし、右側に微小円で避ける。
- それ以外の$G_0(s)$の不安定極は無いと仮定。
- $\lim_{s\to 0} sG_0(s) > 0$とすると、ナイキスト線図は無限遠点で右側を通る。
- つまり、負のゲインKでは閉ループ系が不安定。
- (積分経路の意味では) $G_0(s)$の不安定極は無いので、正のゲイン側は、「ナイキスト線図の外側」に$-1/K$があることが閉ループ系の安定性の条件。



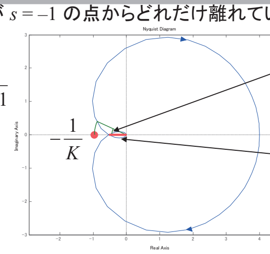
システムの変動に強い閉ループ系

- 簡単のため、もともと一巡伝達関数が安定である場合を考える。
- システムが何らかの理由で変動すると、ナイキスト線図も変形してしまう。

ナイキスト線図は $s = -1$ の点から出来るだけ離れたほうが、
安定性の面からはシステム変動に強いといえる。

- ナイキスト線図が $s = -1$ の点からどれだけ離れているかの尺度 = **安定余裕**
- [2つの安定余裕]

$G_0(s) = \dfrac{-0.1s+4}{s^3+3s^2+3s+1}$

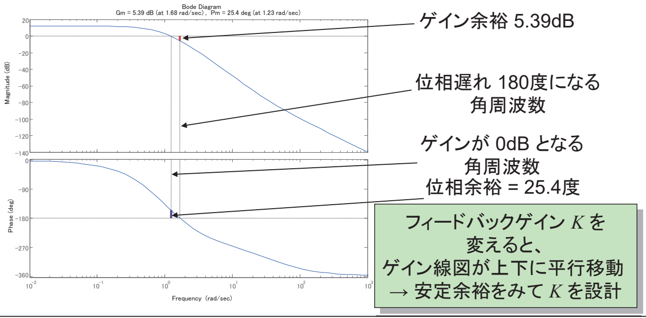


<u>位相余裕:</u>
どれだけ位相が変わると
不安定になるか?

ゲイン余裕:
赤い線の長さの逆数 =
何倍ゲインが大きくなると
不安定になるか?
通常、dB表記。

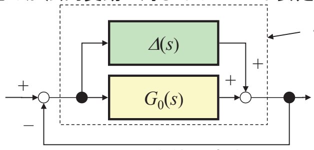
Bode線図でみる安定余裕

- 一巡伝達関数は安定であると仮定する。
- ゲイン余裕・位相余裕は一巡伝達関数のBode線図で見るのが簡単である。



ロバスト安定性

- システムが変動したり、外乱が加わっても、安定性などの性質が保たれることを「ロバスト性」という。
- 下記の加法的変動に対してのロバスト安定性に関しては、以下が知られている。



$\Delta(s)$: 加法的変動
$G_0(s)$: ノミナルな制御対象

- $\Delta(s)$ に関して、**(a)** $\Delta(s)$ 自体は安定 **(b)** $|\Delta(j\omega)| < h(\omega)$ なる関数 $h(\omega)$ が得られている、の2つの情報だけがわかっているものとする。
- そのとき、上記の全ての $\Delta(s)$ に関して閉ループ系が安定となる必要十分条件は、
  - $\Delta(s) = 0$ のときの閉ループ系が安定。かつ、
  - $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$

円条件(1)

- $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$ の条件は、「-1の点と$G_0(j\omega)$の距離が$h(\omega)$以上」と解釈できる。
- つまり、ナイキスト線図の各点で半径$h(\omega)$ の円を書き、それと-1の点が接触しないこと、が条件。
- ナイキスト線図の「線」が太い「帯」状になる、と解釈すればよい。

円条件(2)

- $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$ の条件にて、$h(\omega)$ として定数 L のみしかわかっていない。つまり、$h(\omega) = L$ の場合を考えよう。
- このときナイキスト線図上では、上記の不等式は、「 -1 を中心にして半径 L の円 とナイキスト線図が交わらないこと」と解釈できる。