

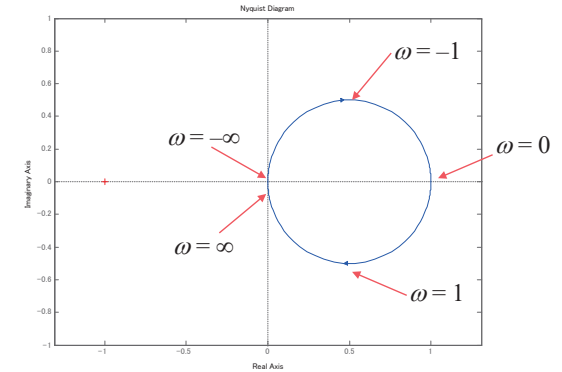
# 13. ナイキスト線図と安定余裕

教科書 9章

## ベクトル線図

- 周波数応答  $G(j\omega)$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ) を複素平面内に描いたものが、ベクトル線図である。
- 横軸が  $\text{Re}[G(j\omega)]$ 、縦軸が  $\text{Im}[G(j\omega)]$
- [例]

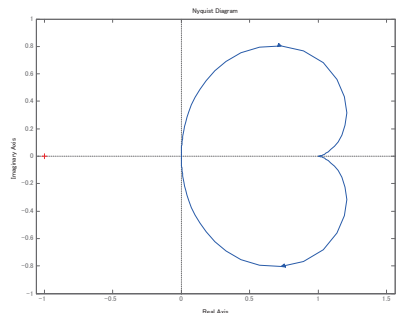
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$



## ベクトル線図の例(1)

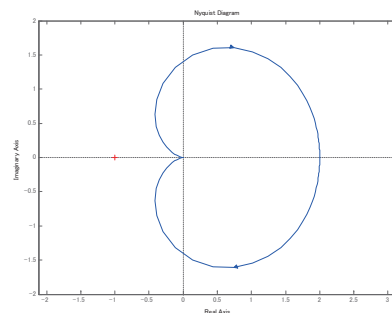
- 2次最小位相系の例 (その1):

$$G(s) = \frac{2s+s}{s^2+2s+2}$$



- 2次最小位相系の例 (その2):

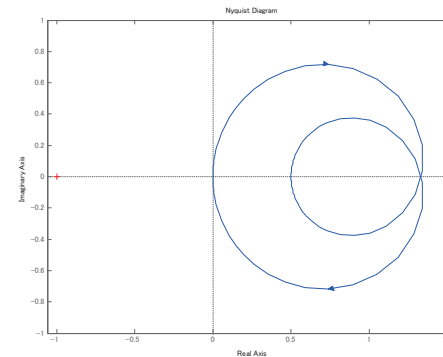
$$G(s) = \frac{4}{s^2+2s+2}$$



## ベクトル線図の例(2)

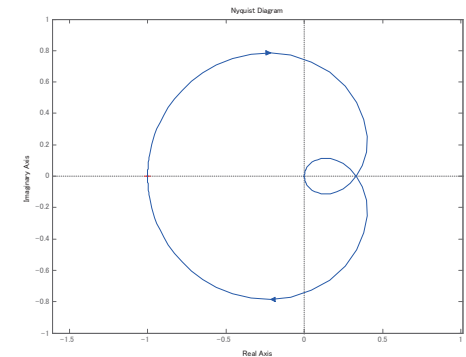
- 2次最小位相系の例 (その3):

$$G(s) = \frac{4s+1}{s^2+3s+1}$$



- 2次非最小位相系の例:

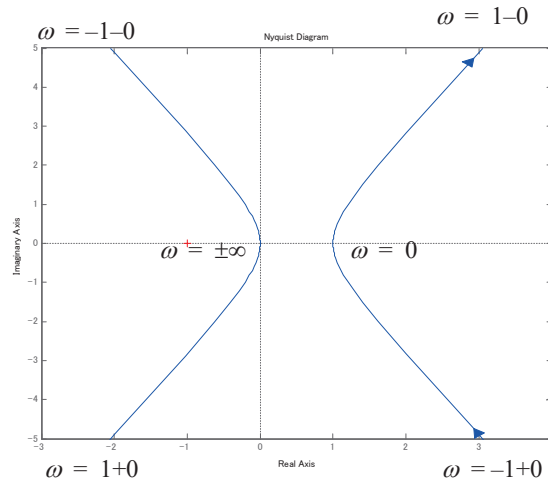
$$G(s) = \frac{s-2}{s^2+3s+2}$$



## ベクトル線図の例(3)

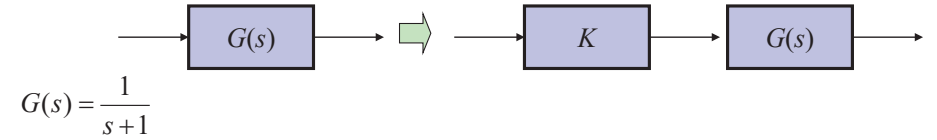
- 虚軸上に極がある場合

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+1}$$



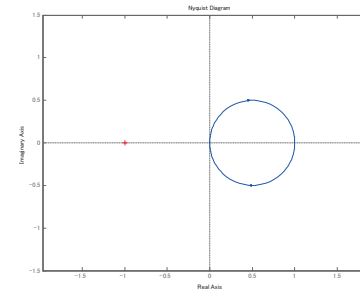
## ベクトル線図のスケーリング

- 伝達関数を  $K$  倍した場合、ベクトル線図も原点を中心に  $K$  倍に拡大される。

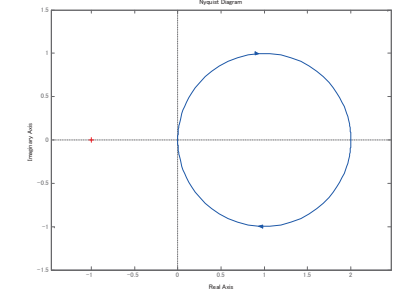


$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$K=1$  の場合

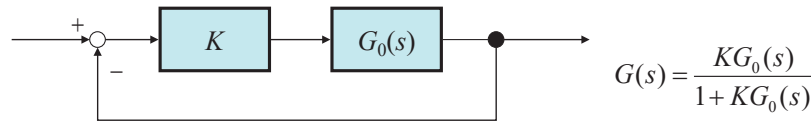


$K=2$  の場合



## フィードバック系の安定判別

- 下のようなフィードバック系(= 閉ループ系)の安定性の判別をしたい。



- 閉ループ系  $G(s)$  の安定性を、一巡伝達関数  $G_0(s)$  のベクトル線図から判別

ナイキストの安定判別法

- ナイキストの安定判別法のために用いる場合、「ベクトル線図」とは呼ばずに、「ナイキスト線図」という。

## ナイキストの安定判別法

- まず、 $K=1$  の場合について考える。



- $G_0(s)$  のナイキスト線図にて、 $s=-1$  の点を、反時計周りに何回まわるか =  $N$
- $G_0(s)$  の不安定な(右半平面にある)極の数 =  $\Pi$
- $G(s)$  の不安定な(右半平面にある)極の数 =  $Z$  これが知りたい

ナイキストの安定判別法:  
 $N = \Pi - Z$

- つまり、閉ループ系が安定である条件は、 $N = \Pi$ 。
- 特に、開ループ系  $G_0(s)$  が安定な場合( $\Pi = 0$ )、閉ループ系が安定である条件は  $N = 0$  である。つまり、 $s=-1$  の点を、ナイキスト線図が1回も回らないことである。

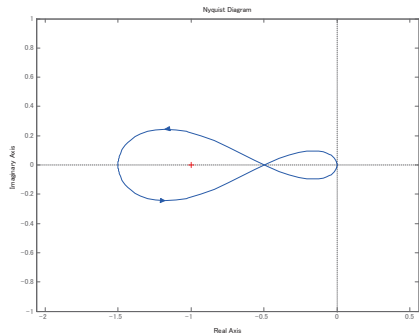
# ナイキストの安定判別法の例

- 代表的な例:

$$G_0(s) = \frac{-s+6}{s^2+2s-4}$$

1つの極が不安定 →  $\Pi = 1$

- 閉ループ系が安定である条件は、ナイキスト線図が  $s = -1$  の点を反時計回りに1回周ること。

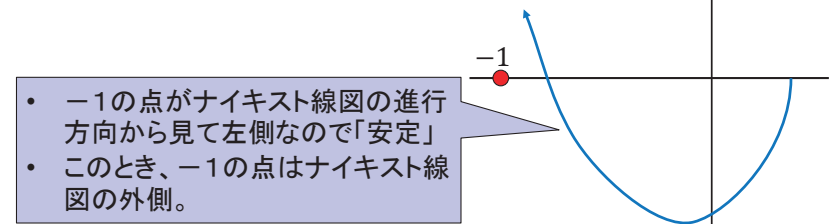


ナイキスト線図が  $s = -1$  を反時計回りに1回転しているの、閉ループ系は安定。

自分が  $s = -1$  の点に立っていると仮定し、ナイキスト線図が自分の周りを何周したかを考えるとわかりやすい。

# 古典的なナイキストの安定判別法

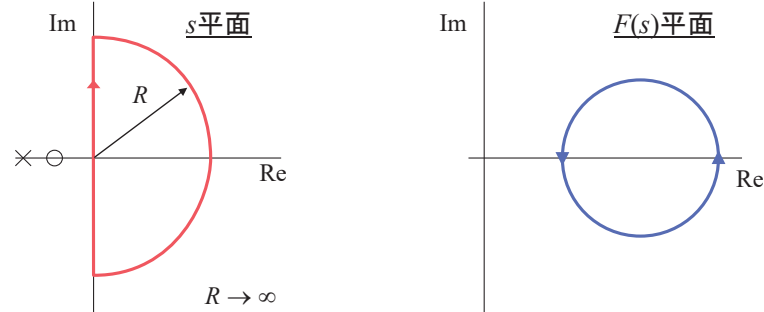
- フィードバック前の  $G_0(s)$  は安定と仮定し、その低周波ゲインは正 ( $G_0(0) > 0$ ) とする。
- そのとき、閉ループ系の安定条件は「-1の点がナイキスト線図の外側にあること」となる。
- 基本的にはナイキスト線図は時計回り。
- 正の周波数のナイキスト線図のみ見て、「-1の点を左側に見て進めば安定」



- 1の点がナイキスト線図の進行方向から見て左側なので「安定」
- このとき、-1の点はナイキスト線図の外側。

# ナイキストの安定判別法の証明

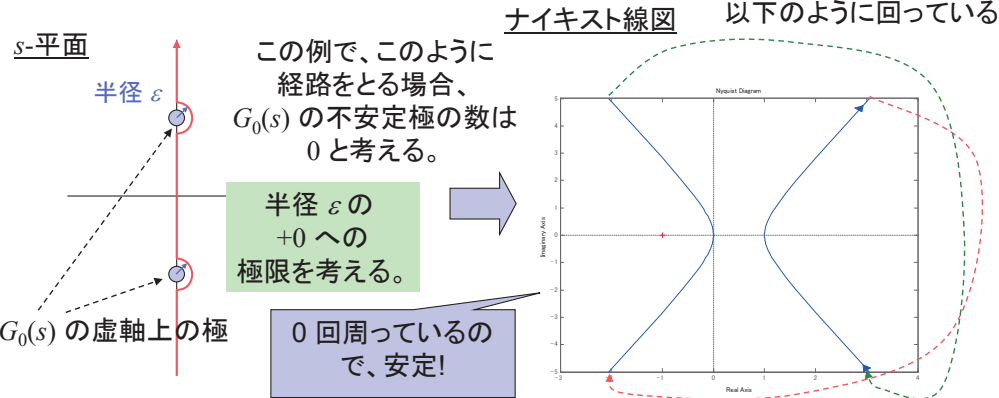
- 左下の経路  $C$  を考える
- 還送差  $F(s) = 1 + G_0(s)$  の (C内にある極の数) =  $\Pi$   
(C内にあるゼロ点の数) =  $Z$
- 偏角定理より、 $C$  の  $F(s)$  への写像が原点を中心とした回転数が  $\Pi - Z$  となる。



# 虚軸上に極がある場合

- 一巡伝達関数の極が虚軸上にあると、ナイキスト線図が無窮遠点を通る。
- この場合、 $s = j\omega$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ) を考える代わりに、左図のような経路を考える。

[例]  $G_0(s) = \frac{2s+1}{s^2+1}$



この例で、このように経路をとる場合、 $G_0(s)$  の不安定極の数は0と考える。

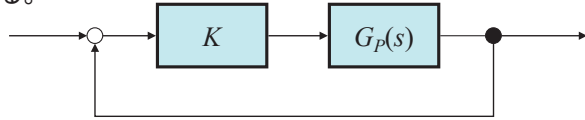
半径  $\epsilon$  の +0 への極限を考える。

0回周っているの、で、安定!

この例では、無窮遠点で以下のように回っている

# ゲインを考慮したナイキストの安定判別

- 以下のように、制御対象  $G_p(s)$  の前に、ゲイン  $K$  が入っている場合の安定判別を考える。



- $G_p(s)$  のナイキスト線図を  $K$  倍に拡大したものを考えればよいのであるが...

$s = -1$  の点を  $1/K$  倍したほうが楽

## ゲインを考慮した場合のナイキストの安定判別法:

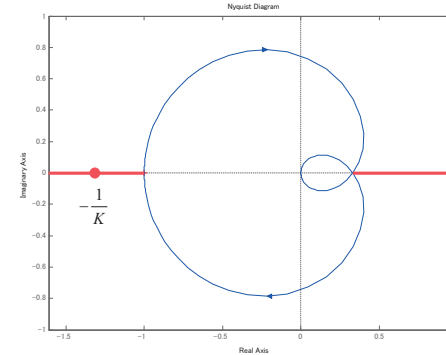
$G_p(s)$  のナイキスト線図が  $s = -1/K$  の点を反時計回りに回る回数と、 $G_p(s)$  の不安定極の数が同じならば、閉ループ系は安定。

# ナイキストの安定判別を用いたゲイン決定

- 以下の例を考える。

$$G_p(s) = \frac{s-2}{s^2+3s+2}$$

$G_p(s)$  の不安定極は 0 個なので、ナイキスト線図が  $s = -1/K$  を 0 回回るのが安定性の条件

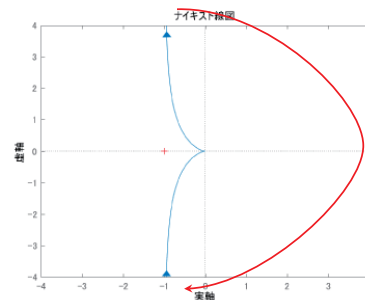


赤い部分に  $-1/K$  があるならば、ゲイン  $K$  に対して閉ループ系は安定

閉ループ系が安定な  $K$  の範囲は、 $-3 < K < 1$

# 原点 $s = 0$ に極がある場合

- 複素数平面の原点  $s = 0$  に極が 1 つある場合、それを「 $G_0(s)$  の安定な極」とみなし、右側に微小円で避ける。
- それ以外の  $G_0(s)$  の不安定極は無いと仮定。
- $\lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) > 0$  とすると、ナイキスト線図は無遠点で右側を通る。
- つまり、負のゲイン  $K$  では閉ループ系が不安定。
- (積分経路の意味では)  $G_0(s)$  の不安定極は無いので、正のゲイン側は、「ナイキスト線図の外側」に  $-1/K$  があることが閉ループ系の安定性の条件。



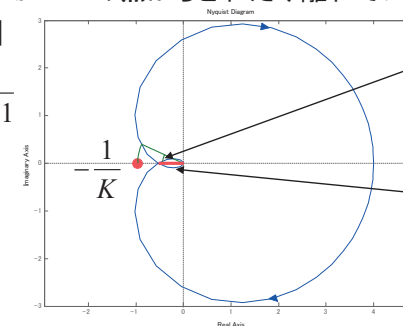
# システムの変動に強い閉ループ系

- 簡単のため、もともと一巡伝達関数が安定である場合を考える。
- システムが何らかの理由で変動すると、ナイキスト線図も変形してしまう。

ナイキスト線図は  $s = -1$  の点から出来るだけ離れたほうが、安定性の面からはシステム変動に強いといえる。

- ナイキスト線図が  $s = -1$  の点からどれだけ離れているかの尺度 = 安定余裕
- [2つの安定余裕]

$$G_0(s) = \frac{-0.1s+4}{s^3+3s^2+3s+1}$$

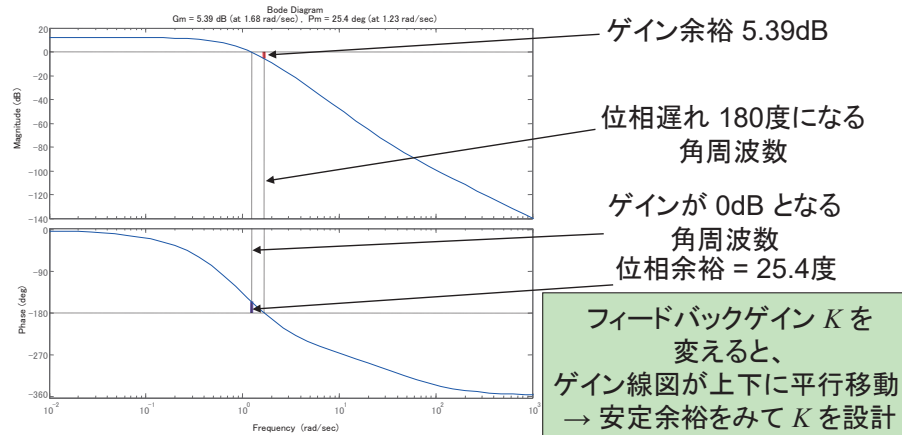


位相余裕:  
どれだけ位相が変わると不安定になるか?

ゲイン余裕:  
赤い線の長さの逆数 = 何倍ゲインが大きくなると不安定になるか?  
通常、dB表記。

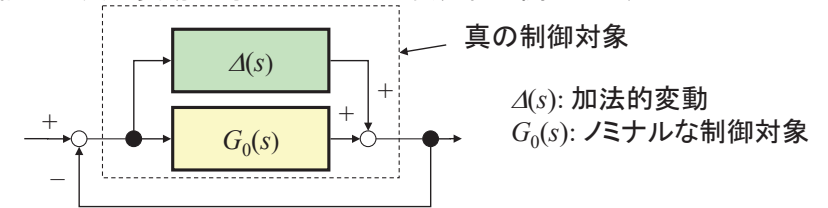
# Bode線図でみる安定余裕

- 一巡伝達関数は安定であると仮定する。
- ゲイン余裕・位相余裕は一巡伝達関数のBode線図で見るのが簡単である。



# ロバスト安定性

- システムが変動したり、外乱が加わっても、安定性などの性質が保たれることを「ロバスト性」という。
- 下記の加法的変動に対してのロバスト安定性に関しては、以下が知られている。



- $\Delta(s)$  に関して、(a)  $\Delta(s)$  自体は安定 (b)  $|\Delta(j\omega)| < h(\omega)$  なる関数  $h(\omega)$  が得られている、の2つの情報だけがわかっているものとする。
- そのとき、上記の全ての  $\Delta(s)$  に関して閉ループ系が安定となる必要十分条件は、
  - $\Delta(s) = 0$  のときの閉ループ系が安定。かつ、
  - $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$

# 円条件(1)

- $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$  の条件は、「-1の点と $G_0(j\omega)$ の距離が $h(\omega)$ 以上」と解釈できる。
- つまり、ナイキスト線図の各点で半径 $h(\omega)$ の円を書き、それと-1の点が接触しないこと、が条件。
- ナイキスト線図の「線」が太い「帯」状になる、と解釈すればよい。

# 円条件(2)

- $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$  の条件にて、 $h(\omega)$  として定数  $L$  のみしかわかっていない。つまり、 $h(\omega) = L$  の場合を考えよう。
- このときナイキスト線図上では、上記の不等式は、「-1を中心にして半径  $L$  の円とナイキスト線図が交わらないこと」と解釈できる。

