12.伝達関数によるフィードバック

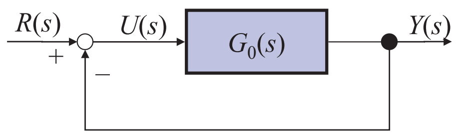
教科書 6.4, 7.4, 7.5

合成伝達関数の求め方(1)

- 「直列結合 = 伝達関数の掛け算」,「並列結合 = 伝達関数の足し算」であった。

では、もっと複雑な場合はどうであろうか?

- 例えば、以下の場合で $G(s) = Y(s) / R(s)$ を求めることを考えよう。



- 関係式を書き出すと、$U(s) = R(s) - Y(s)$, $Y(s) = G_0(s)U(s)$ の2つ。求めたいのは、$R(s)$ と $Y(s)$ の関係であるから、無関係な $U(s)$ を消去しよう。

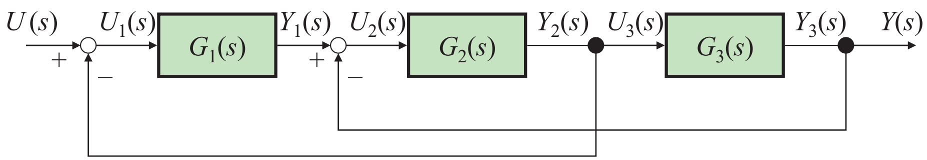
$$Y(s) = G_0(s)(R(s) - Y(s))$$

- 移項すると、$(1 + G_0(s))Y(s) = G_0(s)R(s)$ となるので、$R(s)$ と $Y(s)$ の比を求めると、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

合成伝達関数の求め方(2)

- より複雑な場合も同様に合成伝達関数を求めることができる。
- [例]

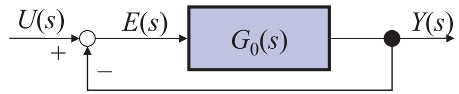


- 関係式: $U_1(s) = U(s) - Y_2(s)$, $U_2(s) = Y_1(s) - Y_3(s)$, $U_3(s) = Y_2(s)$, $Y(s) = Y_3(s)$, $Y_1(s) = G_1(s)U_1(s)$, $Y_2(s) = G_2(s)U_2(s)$, $Y_3(s) = G_3(s)U_3(s)$
- $U_1(s)$, $U_2(s)$, $U_3(s)$, $Y_1(s)$, $Y_2(s)$, $Y_3(s)$ を消去。
- $Y(s) = G_3(s)G_2(s)(G_1(s)(U(s) - G_3(s)^{-1}Y(s)) - Y(s))$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_2(s)G_3(s)}$$

フィードバック系の伝達関数(1) (重要)

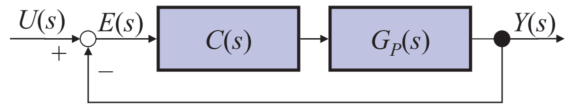
- 単純フィードバックの場合:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)},$$

$$(\text{入力から追従誤差までの伝達関数}) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

- 補償器 $C(s)$ を入れたフィードバックの場合:



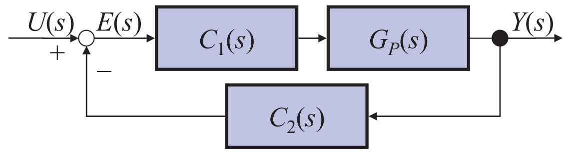
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C(s)G_P(s)}{1 + C(s)G_P(s)},$$

$$(\text{入力から追従誤差までの伝達関数}) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G_P(s)}$$

一巡伝達関数:
$G_0(s) = C(s)G_P(s)$
とおけば、
単純フィードバック
の場合と同じ

フィードバック系の伝達関数(2)

- フィードバックループ内に補償器を2つ入れた例:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C_1(s)G_P(s)}{1 + C_1(s)C_2(s)G_P(s)}$$

$$(\text{入力から追従誤差までの伝達関数}) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + C_1(s)C_2(s)G_P(s)}$$

- 一巡伝達関数…$E(s)$ から始まって、フィードバックの枝で戻ってくるまでの一巡の伝達関数。
- どの場合も、「一巡伝達関数」$G_0(s)$ と「入力から追従誤差までの伝達関数」の関係は、$E(s) / U(s) = 1 / (1 + G_0(s))$ 。[重要]

フィードバック系の極とゼロ点

- 単純フィードバック、あるいは制御対象の前に補償器を置く構成を考える。
- 一巡伝達関数を次のようにおく。

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- このとき、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)/D(s)}{1 + N(s)/D(s)} = \frac{\boxed{N(s)}}{\boxed{N(s) + D(s)}}$$

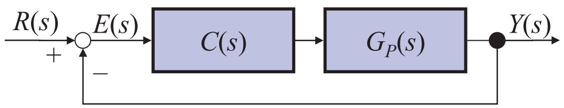
$$\frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + N(s)/D(s)} = \frac{D(s)}{\boxed{N(s) + D(s)}}$$

フィードバックによって
分子は変わらない
(極-ゼロ相殺の場合を除く)

分母は変えることができる。
つまり、安定性を変えることができる。

定常偏差

- プラントの前に補償器を置く構成を考える。



一巡伝達関数:
$G_0(s) = C(s)G_P(s)$

- 入力 $u(t) = \mathfrak{L}^{-1}[R(s)]$が出力 $y(t) = \mathfrak{L}^{-1}[Y(s)]$ の目標値である場合、$e(t) = \mathfrak{L}^{-1}[E(s)]$ は、”出力とその目標値との偏差”である。

偏差 $e(t)$ が、$t \to \infty$ のときある値に収束するなら、その値を**定常偏差**と呼ぶ。

- 入力が $r(t) = 1$ (単位ステップ入力) であるときの定常偏差 … **定常位置偏差**
- 入力が $r(t) = t$ (単位ランプ入力) であるときの定常偏差 … **定常速度偏差**
- 入力が $r(t) = t^2 / 2$ であるときの定常偏差 … **定常加速度偏差**
- 「定常位置偏差」という用語より、直接的に「単位ステップに対する定常偏差」と言うことが多い。

最終値定理の復習

- 時間関数 $f(t)$ の最終値 $f(+\infty)$ をラプラス変換から求める方法。
- [仮定1] 任意の $T > 0$ に対して、$f(t)$ は区間 $[0, T]$ で積分可能。
- [仮定2] 最終値 $f(+\infty)$ が存在する (極限が発散したり、振動が残ったりしない)。

最終値定理:
上記の仮定を満たすならば、

$$f(+\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s), \quad \text{ただし、} F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$$

- つまり、$E(s) = \dfrac{1}{1 + G_0(s)} R(s)$ の最終値を求めれば、定常偏差が得られる。

ただし、「最終値が存在すれば」という条件が付く。最終値が存在しない場合においては公式を使うと無意味な値が出てしまう。

定常位置偏差 (重要)

- **定常位置偏差が存在する条件**: 閉ループ系 $G_0(s)$ / $(1 + G_0(s))$ が安定であること。
- このとき定常位置偏差は次のように求められる。

$$e(+\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_0(s)}\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{D(0)}{N(0)+D(0)}$$

ただし、$G_0(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ 。 $\lim_{s\to 0} G_0(s)$ を位置偏差定数という。

- **定常位置偏差が 0 となる条件**:閉ループ系 $G_0(s)$ / $(1 + G_0(s))$ が安定であり、かつ $D(0) = 0$ となること。つまり、閉ループ系が安定で、一巡伝達関数の極が1つ以上 $s = 0$ にあること。
- 補償器の分母多項式に因子として s をもち、閉ループ系が安定ならば定常位置偏差が 0。

[例] $C(s) = \dfrac{(s+2)(s+3)}{\boxed{s}(s+1)}$ → 分母多項式に因子として s をもつ

定常速度偏差 (重要)

- **定常速度偏差が存在する条件**: 定常位置偏差が 0 であること。
- このとき定常速度偏差は次のように求められる。

$$e(+\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_0(s)}\cdot\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s\{1+G_0(s)\}}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{sG_0(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{D(s)}{sN(s)}$$

ただし、$G_0(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ 。 $\lim_{s\to 0} sG_0(s)$ を速度偏差定数という。

- **定常速度偏差が 0 となる条件**: 閉ループ系 $G_0(s)$ / $(1 + G_0(s))$ が安定であり、かつ $D(s) / s \to 0$ $(s \to 0)$。つまり、閉ループ系が安定、かつ一巡伝達関数の極が2つ以上 $s = 0$ にあること。

定常加速度偏差

- **定常加速度偏差が存在する条件**: 定常速度偏差が 0 であること。
- このとき定常加速度偏差は次のように求められる。

$$e(+\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_0(s)}\cdot\frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2\{1+G_0(s)\}}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G_0(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{D(s)}{s^2N(s)}$$

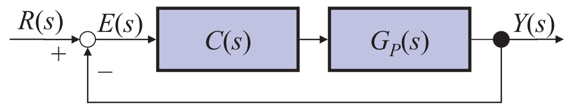
ただし、$G_0(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$。 $\lim_{s\to 0} s^2G_0(s)$ を加速度偏差定数という。

- **定常加速度偏差が 0 となる条件**: 閉ループ系 $G_0(s)$ / $(1 + G_0(s))$ が安定であり、かつ $D(s) / s^2 \to 0$ $(s \to 0)$。つまり、閉ループ系が安定、かつ一巡伝達関数の極が3つ以上 $s = 0$ にあること。

定常偏差の計算の例

- [例]

$G_P(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$ ただし、$T > 0$



- $C(s) = K$ (正の定数) の場合:
  - $G(s) = K$ / $(Ts + K + 1)$ … 安定 → 定常位置偏差は存在する。
  - 定常位置偏差は $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{1}{1+C(s)G_P(s)}\cdot\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{K+1}$
- $C(s) = K$ / s (ただし$K > 0$) の場合:
  - $G(s) = K$ / $(Ts^2 + s + K)$ … 安定 → 定常位置偏差は存在する。
  - 定常位置偏差は $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{1}{1+C(s)G_P(s)}\cdot\dfrac{1}{s} = 0$ →定常速度偏差も存在
  - 定常速度偏差は $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{1}{1+C(s)G_P(s)}\cdot\dfrac{1}{s^2} = \dfrac{1}{K}$

正弦波目標信号への追従

- 同様に、正弦波への追従も考えることができる。
- 目標信号: $r(t) = \cos(\omega t)$,　$R(s) = s/(s^2 + \omega^2)$
- 閉ループ系が安定であることが、定常的な偏差(ゼロにならなければ一定値にはならない)が有界であることの必要条件。⇒安定性を仮定。
- この場合、最終値定理は使えないが、周波数応答より、十分時間が経過した後の$e(t)$は、

$$e(t) = \frac{1}{1+|G(j\omega)|}\cos(\omega t + \phi), \qquad \phi = \arg G(j\omega)$$

- つまり、定常偏差がゼロになる必要十分条件は、閉ループ系が安定、かつ$G(j\omega) = \infty$。$G(j\omega) = \infty$の条件は、「$G(s)$の分母に$(s^2+\omega^2)$を含むこと」と言い換えてもよい。

内部モデル原理

- 目標信号のラプラス変換が有理式$n_{ref}(s)/d_{ref}(s)$になる場合に限定。
- 一巡伝達関数を$G_0(s) = n_0(s)/d_0(s)$とおく。
- 閉ループ系の伝達関数$G_0(s)/(1 + G_0(s))$の安定性を仮定。
- まず、追従誤差

$$E(s) = \frac{d_0(s)}{d_0(s) + n_0(s)} \cdot \frac{n_{ref}(s)}{d_{ref}(s)}$$

を部分分数展開

ここは、仮定よりゼロに漸近

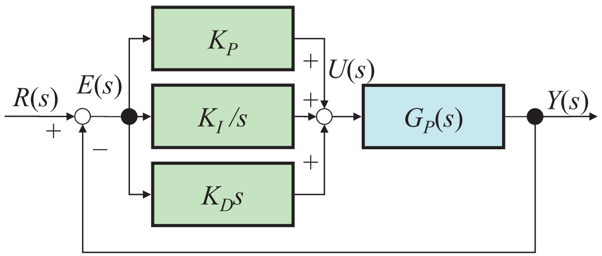
$$E(s) = \boxed{\frac{q(s)}{d_0(s) + n_0(s)}} + \frac{p(s)}{d_{ref}(s)}$$

- $p(s) = 0$になる条件は、$E(s)$の分母から$d_{ref}(s)$が消えること。
- つまり、「定常偏差ゼロ」になる条件は、「閉ループ系が安定、かつ$d_{ref}(s)$の安定ではない因子を全て$d_0(s)$が持っていること」
- つまり、「目標信号の発生ダイナミクスを一巡伝達関数そのものが保持しなくてはならない」 ⇒内部モデル原理

PID制御

- 前置補償器として、

$$C(s) = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s}$$



を使う制御。これは、
  - 比例制御 (P制御) K_P
  - 積分制御 (I制御) K_I/s
  - 微分制御 (D制御) $K_D s$

を組み合わせたものである。I制御のおかげで、定常位置偏差は0である。
- $K_D \neq 0$ のとき、$C(s)$ はプロパーではなくなる。そのため、D制御を除いた、「PI制御」も良く用いられる。
- 「PID制御」という名前ぐらいは覚えておこう。

PIDゲインの決定法(限界感度法など)

- PIDは系を安定にするとは限らない。ゲインの決め方はほとんど経験則。
  - 限界感度法 (Ziegler=Nichols の限界感度法)
  - 部分的モデルマッチングに基づく方法 (北森の方法)....
- 一般論だが、

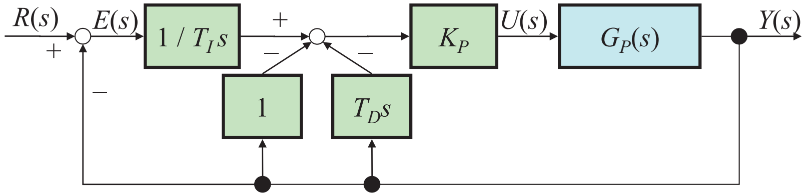
	立ち上がり時間	行き過ぎ量	整定時間	定常偏差	安定性
Kp大	減少	増大	あまり変化なし	減少	悪化
Ki大	減少	増大	増大	完全除去	悪化
Kd大	あまり変化なし	減少	減少	無関係	適切なら改善

- 限界感度法
  - 求めたい保証器を $C(s) = K_P(1 + 1/(T_I s) + T_D s)$ のようにおく。
  - いったん、$C(s) = K_C$ (定数) とし、安定限界になるまで K_C を大きくする。そのときの振動周期を T_C とおく。
  - K_P, T_I, T_D を右のように決める。

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_C$	-	-
PI	$0.45K_C$	$T_C/1.2$	-
PID	$0.6K_C$	$T_C/2$	$T_C/8$

I-PD制御

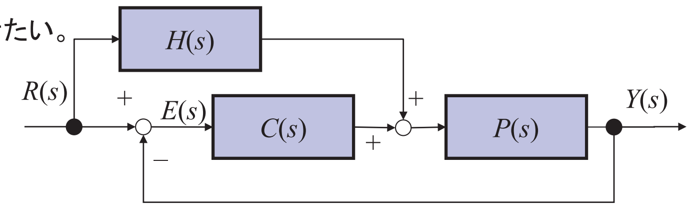
- PID制御系において、目標値 $r(t)$ をステップ状に変化させた場合、入力も急峻に変化する。特にD動作が入っている場合、インパルス状の入力になる。
- これを避けるために、P動作とD動作に目標値 $r(t)$ の影響を直接受けないようにする「I-PD制御」が考案された。



- $T_D \neq 0$ のとき微分器が必要になるが、I-PD制御の場合、状態の一部を取り出すことで微分の代わりにすることができることがある。たとえば、機械系で「位置」が出力のとき、微分器を用いる代わりに、状態の一部である「速度」を用いればよい。

2自由度追従制御系(1)

- $R(s)$ に $Y(s)$ を追従させたい。
- $H(s)$ と $C(s)$ を設計。
- $H(s)$ は安定と仮定。



- 伝達関数

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} + H(s)\frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$H(s)$ の安定性の仮定の下では、閉ループ系の安定性は$H(s) = 0$ のときと同じ。

- 一般的に、先に $C(s)$ を設計し、後から $H(s)$ を設計。
- 理想的には、 $H(j\omega)$ が $1 / P(j\omega)$ に近くなれば、その周波数での追従特性は良くなる。

2自由度追従制御系(2)

- 追従誤差

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - H(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{d_C(s)\{d_P(s) - n_P(s)H(s)\}}{d_P(s)d_C(s) + n_P(s)n_C(s)}$$

- $d_C(0) = 0$ あるいは $d_P(0) - n_P(0)H(0) = 0$ ならば、定常位置偏差はゼロ。
  - 1自由度系とは異なり、$d_P(0) = 0$ は条件ではなくなった。
  - $d_P(0) - n_P(0)H(0) = 0$ は、$H(0) = 1/P(0)$、つまり$P(s)$の低周波ゲインの逆数と$H(s)$の低周波ゲインが一致しているという条件。
  - しかし、$d_P(0) - n_P(0)H(0) = 0$ の条件は、システム$P(s)$ の変動に影響を受ける。(ロバストではない)
- つまり、$d_C(0) = 0$ が(ロバストに)定常位置偏差がゼロになる条件。
- 定常速度偏差なども同様。