

線形システム論

情報エレクトロニクス系
2年後期

I. 概論

教科書 1章+2.1

講義内容の予定

- システムの表現(状態空間表現)
- 微分方程式の復習(初期値問題の解・安定性)
- 座標変換, 可制御・可観測性, 安定性
- 可制御標準形・可観測標準形
- 極配置, オブザーバ
- Laplace変換の復習
- もうひとつのシステム表現(伝達関数表現)および状態空間表現との関連
- ブロック線図, 伝達関数の合成, フィードバック結合
- 伝達関数の安定性
- 周波数応答, Bode線図
- Nyquistの安定判別法
- 定常偏差, PID制御

教科書・講義資料

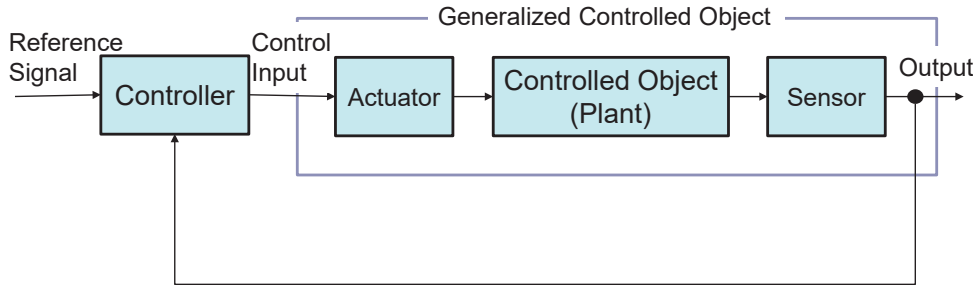
- 教科書は
荒木光彦・細江繁幸 著 「フィードバック制御」
計測・制御テクノロジーシリーズ 7
コロナ社 (2012)
2,800円 + 消費税
- 教科書がないとわからなくなるタイプの授業です
- 講義資料は、

<http://stlab.ssi.ist.hokudai.ac.jp/yuhyama>

[/lecture/linearsys/](#)

制御系の概略

- 一般的な制御系の「ブロック線図」



一般に、参照信号(reference signal)が

- 一定値の場合 = レギュレータ系
- 変化する場合 = サーボ系

信号が前に戻る
= フィードバック

メカニカルシステムの例

連立2階常微分方程式で表されたメカニカルシステム

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = u$$

q : 一般化位置ベクトル, u : 制御入力 (外部からのトルク・力)

$M(q)$: 慣性行列, $c(\cdot)$: 遠心力・コリオリ力・摩擦力の項, $g(\cdot)$: 重力項

連立1階常微分方程式系: (まとめてベクトルで表す)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1} \{-c(q, \dot{q}) - g(q) + u\} \end{pmatrix}$$

状態を定義:

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

状態方程式:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$\dot{x} = \dots$ で始まる式
→ 状態方程式

システムの表現

- 制御で扱うシステムは「動的システム」

例:

- 常微分方程式で表される系
- 差分方程式で表される系
- 偏微分方程式で表される系, など...

「系」...「システム」に対する
日本語

常微分方程式で表されるシステム:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u)$$

系の状態: x , 系への入力: u , 系からの出力: y (これらは通常はベクトル)

- 「系の状態」というものがあるのが「動的システム」(dynamical system)
- 動的システムでは、現在の系の出力は現在の入力だけで一意に決まるものではない。過去のシステムの動きの蓄積によって、未来の動きが変わる。

線形状態方程式の導出(1)...偏差系

- ある入力 $u = u_0$ のとき, $x = x_0$ に静止
「静止している」ということより、微分は0

$$\dot{x} = f(x, u) \Rightarrow 0 = f(x_0, u_0)$$

- 偏差を定義: $z = x - x_0$
 $v = u - u_0$

偏差系:

$$\dot{z} = F(z, v) = f(x_0 + z, u_0 + v)$$

状態の目標値 x_0 と、それを維持するための入力 u_0 を考え、それからの偏差を用いて偏差系を考える。

明らかに、
 $F(0, 0) = f(x_0, u_0) = 0$

$v = 0$ のとき, $z = 0$ は「平衡点」

線形状態方程式の導出(2) ... 線形近似

- 線形近似... テーラー級数展開を一次までで打ち切り

線形近似:

$$\dot{z} = \left[\frac{\partial F}{\partial z}(0,0) \right] z + \left[\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) \right] v + O((z,v)^2)$$

$$\cong Az + Bv$$

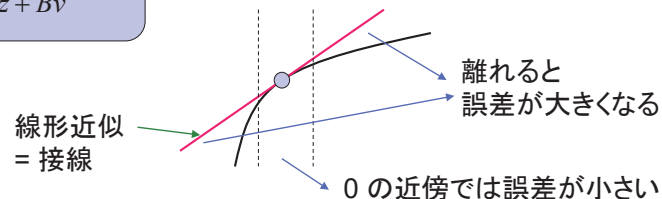
$F(0,0) = 0$ なので0次項は無い

2次以上の項 → 無視

線形近似系:

$$\dot{z} = Az + Bv$$

線形系のほとんどは線形“近似系”
 z と v が小さい時だけ近似が有効



2. 微分方程式の解

教科書 2章

ただし、Laplace変換は後回し

1階線形微分方程式の解

- 1階同次線形微分方程式

$$\dot{x} = ax$$

初期値問題の解:

$$x(t) = x(0)e^{at}$$

- 1階線形微分方程式

$$\dot{x} = ax + b(t)$$

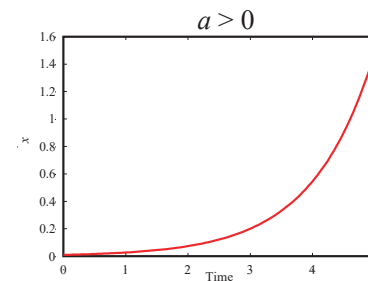
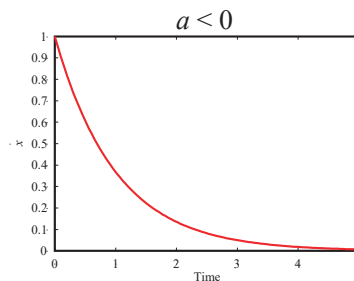
初期値問題の解:

$$x(t) = x(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b(\tau) d\tau$$

- 代入して確認すること。
- 初期状態を満たすこと、つまり $t=0$ のときに式がなりたつことを確認すること。

1階同次線形微分方程式の安定性

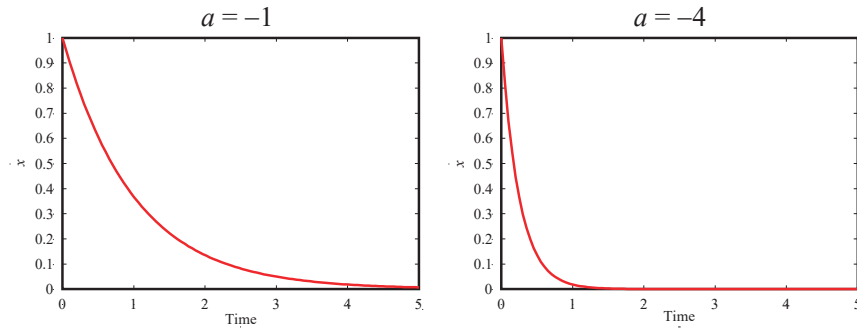
- 解: $x(t) = x(0)e^{at}$



- a が負 ... 0に収束 (漸近安定)
- a が正 ... 発散 (不安定)
- a が0 ... 一定値を取り続ける (安定限界)

収束の速さ

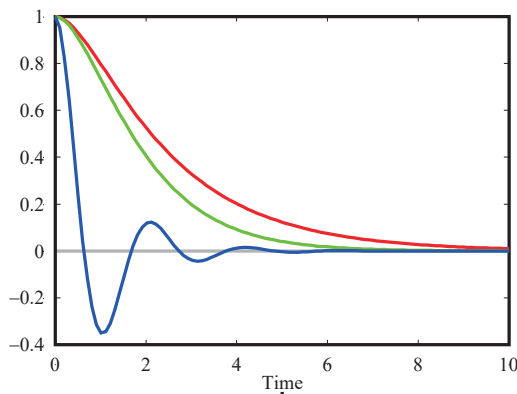
- $\dot{x} = ax$ の解: $x(t) = x(0)e^{at}$ の収束の速さと、 a との関係



- a が小さいほうが(負で絶対値が大きいほうが) 収束が速い。

2階線形微分方程式の解の挙動

- 微分方程式: $\ddot{x} + 2\dot{x} + kx = 0$
- 赤: $k = 0.75$ (異なる実根), 緑: $k = 1$ (重根), 青: $k = 3.1622\dots$ (虚数解)
- $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$



- 全ての特性方程式の解の実部が負であることが、0に収束するための必要十分条件。
- 特性方程式が虚数解を持てば、挙動は振動的になる。その虚数部は振動の角周波数となる。

2階線形微分方程式

- 2階同次線形微分方程式:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

- 特性方程式:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

- 一般解:

- 特性方程式が2つの実解 λ_1, λ_2 を持つ場合

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

- 特性方程式が重根 λ_1 を持つ場合

$$x(t) = C_1 t e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t}$$

- 特性方程式が虚数解 $p \pm jq$ を持つ場合 (j は虚数単位)

$$x(t) = C_1 e^{pt} \cos(qt) + C_2 e^{pt} \sin(qt)$$

- C_1, C_2 は定数。 x と \dot{x} の初期値を、一般解および一般解の両辺を微分した式に代入して、 C_1, C_2 を決定する。

行列指数関数

- 通常の指数関数

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2}{2!}t^2 + \frac{a^3}{3!}t^3 + \dots$$

重要!

- 行列指数関数:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

A が $n \times n$ の行列ならば、 e^{tA} も $n \times n$ の行列。

- 行列指数関数の微分

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \dots = A e^{tA}$$

- 行列指数関数の積分 (A が正則のとき)

$$\int e^{tA} dt = A^{-1} e^{tA} + C, \quad \int_0^t e^{\tau A} d\tau = A^{-1} (e^{tA} - I)$$

連立1階線形方程式の解

- 連立1階同次線形方程式:

$$\dot{x} = Ax$$

その初期値問題の解:

$$x(t) = e^{tA}x(0)$$

- 連立1階線形方程式:

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

その初期値問題の解:

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}b(\tau)d\tau$$

代入することで、これは確かめられる。

行列指数関数の計算

- 逆ラプラス変換($\mathcal{L}^{-1}\{\}$)を用いる方法:

$$e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}\right)$$

- 対角化・ジョルダン標準形を用いる方法:

たとえば、行列 A が対角化可能なとき、正則行列 T が存在して、

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値})$$

とできる。よって、

$$e^{tA} = T^{-1}e^{tTAT^{-1}}T = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T$$

座標変換 $z = Tx$ を用いているのと同じ

遷移行列

- 定義:

$$\dot{\Phi} = A\Phi$$

$$\Phi(0) = I$$

なる $n \times n$ 行列 $\Phi(t)$ を $\dot{x} = Ax$ の遷移行列という

- 実は、これは **行列指数関数に一致**。(Aが定数行列の場合)

- 性質:

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

$$\Phi(-t) = \{\Phi(t)\}^{-1}$$

- 遷移行列の i 列目は、 $x(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ (i 番目の要素が1)を初期値とした $\dot{x} = Ax$ の解。

線形システムと解の公式

- 線形システム:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$x \dots$ 状態 (n 次元ベクトル), $u \dots$ 入力 (m 次元ベクトル), $y \dots$ 出力 (l 次元ベクトル)

- 解の公式: **重要!!**

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{tA}x(0) + C \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

3. システムの座標変換

教科書3章

状態の座標変換 (重要)

- 状態の定義を変えることによって、入出力の関係を変えずに、別な形のシステムに変換することができる。

- 元のシステム

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

- 座標変換 $z = Tx, x = T^{-1}z$ (教科書では T^{-1} を T と書いてあるので注意)
(T は変換行列で正則でなくてはならない)

- 新しいシステム $\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}z + TBu$
 $y = Cx + Du = CT^{-1}z + Du$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}u \\ \bar{A} &= TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D \end{aligned}$$

座標変換後も、さまざまな性質が保存される。

ジョルダン標準形

- 対角化できなくてもジョルダン標準形に相似変換できる
- ジョルダン標準形 (相似変換でこの形に変形)

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{bmatrix}$$

ただし、 J_i はジョルダンブロック(ジョルダンセル)と言われ、

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

- 対角成分は固有値 (上三角行列なので明らか)
- 実対角化と同様に実ジョルダン標準形というものもあるが、ここでは割愛

重複度

- 幾何学的重複度
同じ固有値を持つジョルダンセルの数
- 代数的重複度
同じ固有値を持つ全てのジョルダンセルの大きさの和
- 全ての固有値に対して、「幾何学的重複度 = 代数的重複度」ならば、対角化されている。
- 特性多項式
 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{N_1} \dots (\lambda - \lambda_q)^{N_q}$ (N_i は代数的重複度)
- ケーリー・ハミルトンの定理: $\varphi(A) = 0$
- 最小多項式: $\varphi_M(A) = 0$ となる最小次数の多項式 (最高次の係数=1)
 $\varphi_M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{K_1} \dots (\lambda - \lambda_q)^{K_q}$ (K_i は最大のジョルダンセルの大きさ)
- 全ての固有値に対して $N_j = K_j$ ならば、つまり、幾何学的重複度が1ならば、 A は巡回的であるという。

一般化固有ベクトル

- ある固有値 $\lambda = \lambda_i$ に対応する固有ベクトル

$$(\lambda_i I - A)x = 0$$

幾何学的重複度 M_i 個の一次独立な固有ベクトルが存在。(一般にはそれらの張る空間内のベクトルは全て固有ベクトル)

- ある固有値 $\lambda = \lambda_i$ に対応する一般化固有ベクトル

$$(\lambda_i I - A)^k x = 0$$

固有ベクトルを含む

$$(\lambda_i I - A)^2 x = 0 \rightarrow N_i + \text{大きさ2以上のジョルダンセルの数}$$

$$(\lambda_i I - A)^3 x = 0 \rightarrow N_i + \text{大きさ2以上のジョルダンセルの数} \\ + \text{大きさ3以上のジョルダンセルの数}$$

基底の選び方

ジョルダン標準形に相似変換(モード分解)するための基底

- 固有値 $\lambda = \lambda_i$ に対応する基底の選び方

- 代数的重複度の数の一般化固有ベクトル空間を生成する最小の k を k_{\max} とする (= K_i)。
- $k_{\max} - 1$ に対応する一般化固有ベクトル空間に含まれない、 k_{\max} に対応する一般化固有ベクトルを選ぶ: $x_{k_{\max},1}, \dots, x_{k_{\max},r_{k_{\max}}}$
- $k_{\max} - 2$ に対応する一般化固有ベクトル空間に含まれない、 $k_{\max} - 1$ に対応する一般化固有ベクトルのうち、 $x_{k_{\max}-1,j} = (\lambda_i I - A)x_{k_{\max},j}$ ($j = 1, \dots, r_{k_{\max}}$) を先に選ぶ。残りも一次独立になるように選ぶ。
- 以下繰り返し
- $x_{1,1}, \dots, x_{k_{\max},1}, x_{2,1}, \dots$ のように並べた行列がジョルダン標準形への変換行列。(大きなジョルダンブロックが先に並ぶ)
- 変換行列には自由度が存在。