「ディジタル制御」(後半)

北海道大学 大学院情報科学研究科　　山下　裕

2013 年後期・3 年生対象

オブザーバ

出力フィードバック

これから以降は、連続時間系に戻り、より進んだ制御手法の説明を行う。また、適宜、離散時間系に関して補足する。

制御対象:
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

静的な出力フィードバック: $u = Ky$
(状態フィードバックと異なり、全ての極を指定できない)

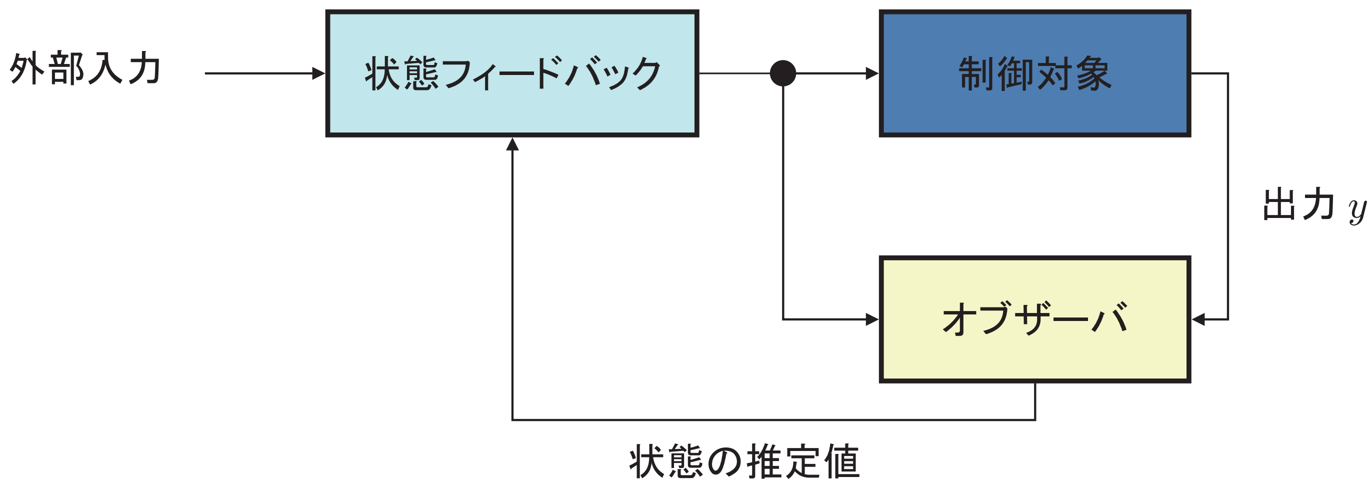
動的な出力フィードバック:
$$\dot{\xi} = P\xi + Qu + Ry$$
$$u = K_1\xi + K_2 y$$

可制御・可観測ならば、すべての極を指定可能。

動的な出力フィードバックの設計手法:
「状態フィードバック」+「オブザーバ」

オブザーバ

- ✔ オブザーバ (状態推定器) とは、状態 x が直接観測できないとき、出力 y と入力 u から x を推定する機構
- ✔ 出力の次元は状態の次元より少ないのが普通 $\rightarrow$ 出力の瞬間値だけからでは、状態は推定できない。
- ✔ そこで、**過去の履歴の情報**も用いる。つまり、オブザーバ自体も微分方程式で表現される。$\rightarrow$ 動的フィードバック



同一次元オブザーバの構成

- ✔ **制御対象**: $\dot{x} = Ax + Bu$
  $y = Cx$
- ✔ **制御対象のコピー**: $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu$ $\tilde{x}$ は x の推定値。
  $\tilde{y} = C\tilde{x}$
- ✔ このままでは、初期推定誤差がゼロに収束する保証がない。そこで、出力の差 $\tilde{y} - y = C\tilde{x} - y$ により、制御対象のコピーの動きを修正。

同一次元オブザーバ:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K(C\tilde{x} - y)$$
$$\tilde{y} = C\tilde{x}$$

赤字の部分は、修正項

推定誤差

$$e = x - \tilde{x}$$

推定誤差のダイナミクス

$$\begin{aligned}\dot{e} &= [Ax + Bu] - [A\tilde{x} + Bu + K(C\tilde{x} - y)] \\ &= A(x - \tilde{x}) + KC(x - \tilde{x}) \\ &= (A + KC)e\end{aligned}$$

$\boxed{(A + KC) \text{ が漸近安定ならば、推定誤差はゼロに漸近}}$

オブザーバの固有値 (1)

✔ オブザーバの固有値 $=A+KC$ の固有値

疑問: K を選ぶことで、オブザーバの固有値を自由に選べるだろうか?

✔ $A+KC$ の固有値 $=(A+KC)^T$ の固有値 $=A^T+C^TK^T$ の固有値

✔ **双対なシステムの極配置問題**

$$\dot{z}=A^Tz+C^Tv$$
$$v=K^Tz$$

K^T を選ぶことで $A^T+C^TK^T$ の固有値を自由に選べるか? $\rightarrow$ 元の系のオブザーバの固有値配置問題と同じ

✔ 「双対なシステムの極配置問題」と等価= 必要十分条件は双対なシステムの可制御性つまり、

オブザーバの固有値配置が自由にできる必要十分条件は可観測であること

オブザーバの固有値 (2)

可観測正準形:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

誤差システム:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 + k_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} + k_{n-1} \end{bmatrix} e$$

ただし、$K = (k_0, \ldots, k_{n-1})^T$

多項式 $s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_0 - k_0)$ が目標の特性多項式になるように K を選ぶ

分離定理 (1)

- ✔ 制御対象: $\dot{x} = Ax + Bu$
  $y = Cx$
- ✔ 状態フィードバックを設計: $u = Fx$
  $\rightarrow A + BF$ が望ましい固有値を持つように設計
- ✔ オブザーバを設計:
  $\rightarrow A + KC$ が望ましい固有値を持つように設計
- ✔ この 2 つを組み合わせる。つまり、$u = Fx$ のかわりに、推定値を用いて $u = F\tilde{x}$ を採用

推定値を用いることで、$A + BF$ の固有値が変化しないであろうか?
　$\rightarrow$ 結論としては「問題ない」 (次のページ参照)

分離定理 (2)

拡大系:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A+KC \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

つまり、フィードバック系の固有値は、$A+BF$ の固有値と $A+KC$ の固有値をあわせたもの。

オブザーバの設計と独立に、状態フィードバックの設計を行ってよい
$\rightarrow$ 制御と観測の分離 = **分離定理**

線形系だから分離定理が成り立っている。非線形系では成り立たない。

最小次元オブザーバ (1)

- ✔ 全状態オブザーバは、n 個の状態を推定。しかし、$y = Cx$ により状態の一部は既にわかっているはず。
- ✔ 状態を推定するためには、$n - \ell$ 本の微分方程式でよいのでは? $\rightarrow$ 最小次元オブザーバ

以降では、1 出力 ($\ell = 1$) の場合の最小次元オブザーバについて考える。

最小次元オブザーバ (2)

可観測正準形:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

座標変換:

$$w = Qx = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & s_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & s_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

最小次元オブザーバ (3)

座標変換後のシステム:

$$\dot{w} = A_1 w + b_1 u, \quad y = C_1 w$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & -s_0 & -s_{n-2}s_0 - a_n + a_1 s_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -s_{n-2}s_1 - a_{n-1} + a_1 s_1 + s_0 \\ & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -s_{n-2} & -s_{n-2}^2 - a_2 + a_1 s_{n-2} + s_{n-3} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 + s_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = cQ^{-1} = (0, \ldots, 0, 1), \quad b_1 = Qb$$

変換後の状態 w の最後の要素は y そのものなので、次のようにおく。

$$w = \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}$$

最小次元オブザーバ (4)

変換後のシステムに対し同一次元オブザーバを作る

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & p \\ \hline 0 \cdots 0\,1 & -a_1 + s_{n-2}\end{array}\right]\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_2\\ b_3\end{pmatrix}u$$

最後の要素 y は推定する必要が無いので、上の $n-1$ 本の式を抜き出す

最小次元オブザーバ:

$$\dot{\tilde{\xi}} = A_2\tilde{\xi} + b_2 u + py$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & -s_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \end{bmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -s_{n-2}s_0 - a_n + a_1 s_0 \\ -s_{n-2}s_1 - a_{n-1} + a_1 s_1 + s_0 \\ \vdots \\ -s_{n-2}^2 - a_2 + a_1 s_{n-2} + s_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = Q^{-1}(\tilde{\xi}^T, y)^T$$

最小次元オブザーバの安定性

- ✔ **推定誤差**: $e_\xi = \xi - \tilde{\xi}$
- ✔ **推定誤差のダイナミクス**:

$$\begin{aligned}\dot{e}_\xi &= \{A_2\xi + py + b_2u\} - \{A_2\tilde{\xi} + py + b_2u\} \\ &= A_2 e_\xi\end{aligned}$$

最小次元オブザーバの安定性は A_2 の安定性で決まる

よって、

$$\det[\lambda I - A_2] = \lambda^{n-1} + s_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + s_1\lambda + s_0$$

が安定多項式になるように、$s_0, \ldots, s_{n-2}$ を選ぶ。

リアプノフ安定論

平衡点

自律的システム:

$$\dot{x} = f(x)$$

において、$f(x_0) = 0$ となる点 x_0 を平衡点 (equilibrium (point), 特異点) という。

- ✔ 通常は、状態 x を平行移動するように再定義し、原点 $x = 0$ を平衡点として論ずる場合が多い。$\Rightarrow$ 一般性は失われない。
- ✔ 平衡点では $\dot{x} = 0$、すなわち解は停留する。
- ✔ 以降では、この平衡点の安定性に関して述べる。

安定性の厳密な定義 — 復習 (1)

有界性: Boundedness

系 $\dot{x} = f(x)$ において、平衡点近傍 U の初期値 $x(0)$ から出発した解が**有界**であるとは、初期値によって定まる状態のノルム上界 $K(x(0))$ が存在し、$\|x(t)\| \leq K(x(0)),\ t \geq 0$ となることである。

(局所) 安定性: (Local) Stability → LS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が **(局所) 安定**であるとは、全ての $\epsilon > 0$ に対して $\delta(\epsilon) > 0$ が存在し、以下が成り立つこと。

$$\|x(0)\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t; x(0))\| < \epsilon, t \geq 0$$

- ✔ (安定な系) ⊂ (ある原点近傍を初期値とする解が有界な系)
- ✔ 安定な系では、原点近傍から出発した解は原点近傍に留まる。(リミットサイクルのような場合、軌道は有界だが、原点は不安定。)
- ✔ (局所) 安定性のことを Lyapunov 安定性ということがある。
- ✔ (局所) 安定性の主語は ‘システム’ ではなく ‘平衡点’ である。

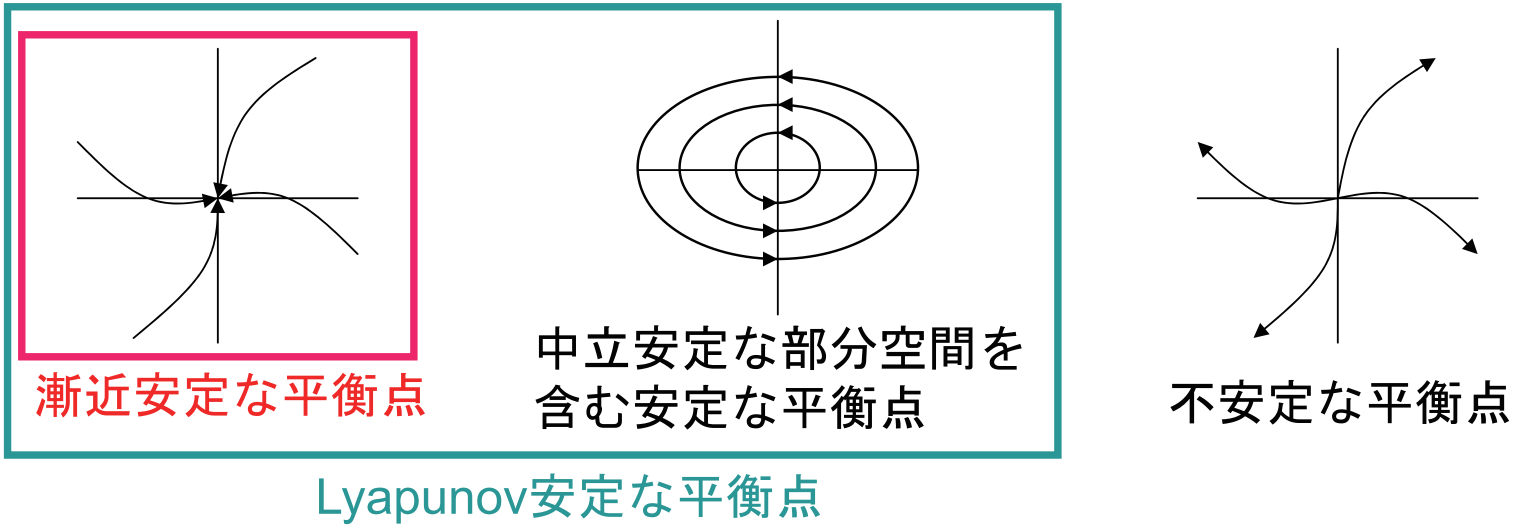
安定性の厳密な定義 — 復習 (2)

吸引性: Attractiveness

原点近傍 U が存在し、その近傍を初期値 $x(0)$ とする解が、$\|x(t;x(0))\| \to 0$ $(t \to \infty)$ ならば、原点は吸引的であるという。また、そのとき U を吸引領域という。

(局所) 漸近安定性: (Local) Asymptotical Stability → LAS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が (局所) 漸近安定であるとは、$x = 0$ が安定かつ吸引的であることである。



安定性の厳密な定義 — 復習 (3)

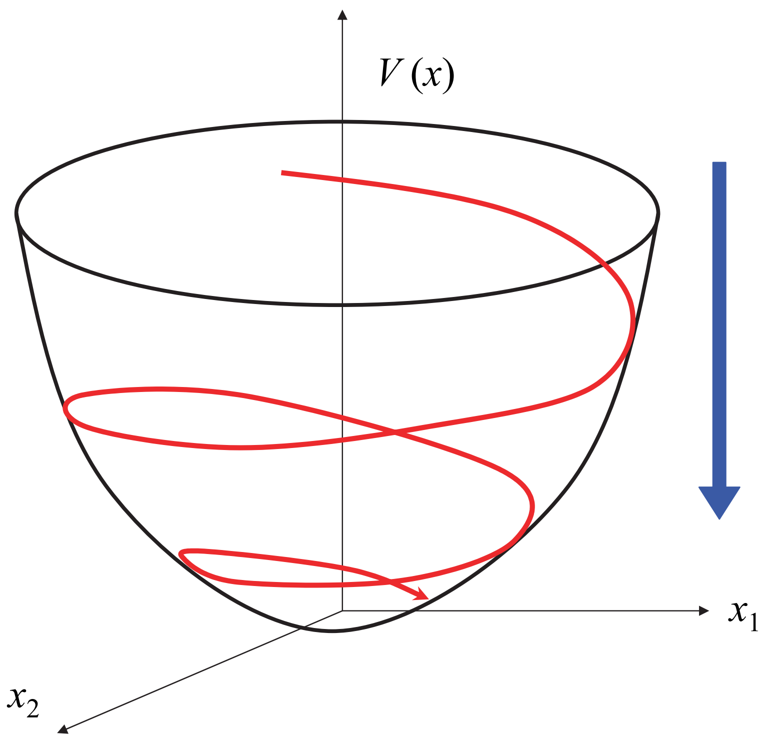
大域的安定性: Global Stability → GS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が大域的に安定であるとは、安定であり、かつ全ての初期値に対する解が有界であることである。

大域的漸近安定性: Global Asymptotical Stability → GAS

系 $\dot{x} = f(x)$ の平衡点 $x = 0$ が大域的漸近安定であるとは、漸近安定で、かつ吸引領域が全領域であることである。

Lyapunov 関数の概念



Lyapunov 関数: $V(x)$
$\rightarrow$ 正定関数

正定関数とは:
- ✔ $V(0) = 0$
- ✔ $V(x) > 0, \quad x \neq 0$

$\Rightarrow$ お椀型の関数

たとえば、

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$$

$V(x)$ が単調減少すれば、x は原点に漸近

$\Rightarrow \dot{V}(x) < 0 \ (x \neq 0)$ なら漸近安定

Lyapunov の安定定理

共通した条件: $\boxed{V(x) \text{ は正定関数}}$

LS:
原点近傍で

✔ $\dot{V} \leq 0$

ならば、(局所) 安定。

LAS:
原点近傍で

✔ $\dot{V} < 0 \ (x \neq 0)$

ならば、(局所) 漸近安定。

GS:

✔ $\dot{V} \leq 0$
✔ $V(x)$ が放射状に非有界

ならば、大域安定。

GAS:

✔ $\dot{V} < 0 \ (x \neq 0)$
✔ $V(x)$ が放射状に非有界

ならば、大域的漸近安定。

放射状に非有界 (Radially unbounded) であるとは?

$$V(x) \to \infty \quad (\|x\| \to \infty)$$

$\dot{V}$ の計算法

もともとは、微分方程式

$$\dot{x} = f(x)$$

の安定性を調べたかったはず。→ $f(x)$ の情報はどこで使うのだろう?

$\dot{V}(x)$ の計算に $f(x)$ を使う。

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

$\partial V/\partial x$ は横ベクトル。

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

2 次形式と正定行列

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ に関する同次な 2 次式 $W(x)$ は、

$$W(x) = x^T P x$$

のように対称行列 P を用いて表現できる。

[例] $x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$W(x) = x^T P x$ が正定関数である必要十分条件は、P の固有値が全て正であることである。

- ✔ **正定行列**: 固有値が全て正な実対称行列。$P > 0$ と表記。
- ✔ **準正定行列**: 固有値が全て正またはゼロである実対称行列。$P \geq 0$ と表記。
- ✔ 負定行列, 準負定行列も同様に定義される。
- ✔ 正定行列 P, Q に対し、$Q - P > 0$ ならば $Q > P > 0$ と書く。

線形系

$$\dot{x} = Ax$$

の漸近安定性に関するリアプノフの定理は以下のようになる。

線形系のリアプノフの定理: $\dot{x} = Ax$ が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正定行列 Q に対してリアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q$$

の解 P が正定となることである。

- ✔ これは、2 次形式のリアプノフ関数 $V(x) = x^T P x$ が存在して、その時間微分 $\dot{V} = x^T(PA + A^T P)x$ が負定関数 $-x^T Q x$ になることを意味している。
- ✔ 線形の場合、2 次のリアプノフ関数だけを考えればよく、この定理が必要十分条件で与えられていることに注意する。
- ✔ 漸近安定性を調べるために、全ての $Q > 0$ に対し条件をチェックする必要はないことに注意する。

線形系の場合 (2)

十分性は明らか。
必要性を証明する。$\dot{x} = Ax$ が漸近安定ならば、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau &= -\int_0^\infty x(\tau)^T (PA + A^T P) x(\tau) d\tau \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{d\tau} x(\tau)^T P x(\tau) d\tau \\ &= x(0)Px(0) - x(\infty)Px(\infty) \\ &= x(0)Px(0) > 0 \quad (x(0) \neq 0)\end{aligned}$$

となり、P は正定行列。

線形系の場合 (3)

次の形の必要十分条件も得られている。

組 (A, C) が可観測と仮定する。$\dot{x} = Ax$ が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正の数 α に対し、

$$PA + A^T P = -\alpha C^T C - Q$$

を満たす $P > 0$, $Q \geq 0$ が存在することである。

$V(x) = x^T P x$ に対し $\dot{V} \leq -\alpha x^T C^T C x$ となるが、右辺が準負定にしかならないので、$y = Cx$ がゼロに漸近することしかいえない。ここで可観測性より y が恒等的にゼロならば x もゼロなので、最終的に漸近安定性が結論できる。
なお、$Q = 0$, $\alpha = 1$ のときの P は可観測性グラミアンになる。

離散時間の場合

$$x(k+1) = Ax(k)$$

の漸近安定性に関するリアプノフの定理は $\dot{V}$ の代わりに $V(x(k+1)) - V(x(k))$ を考えればよい。

$x(k+1) = Ax(k)$ が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正定行列 Q に対してリアプノフ方程式

$$A^T PA - P = -Q$$

の解 P が正定となることである。

組 (A, C) が可観測と仮定する。$x(k+1) = Ax(k)$ が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正の数 α に対し、、

$$A^T PA - P = -\alpha C^T C - Q$$

を満たす $P > 0$, $Q \geq 0$ が存在することである。

カルマンフィルタ

白色ガウス雑音

- ✔ $\{w(k)\}$ が離散時間での**白色雑音** (white noise) であるとは、平均がゼロで、$w(i)$ と $w(j)$ $(i \neq j)$ が無相関

$$\bar{w} = E[w] = 0, \quad E[w(i)^T w(j)] = \delta_{i,j}\sigma^2 I$$

- ✔ $w(t)$ が連続時間の意味で**白色雑音**であるとは、平均がゼロで、$w(t)$ と $w(t')$ $(t \neq t')$ が無相関

$$\bar{w} = E[w] = 0, \quad E[w(t)^T w(t')] = \delta(t - t')\sigma^2 I$$

- ✔ 雑音が**ガウス性**を持つとは、その確率分布が正規分布 (ガウス分布) であること

$$E[w(t) < x] = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx', \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

- ✔ ガウス性の白色雑音を**白色ガウス雑音**という。

離散時間カルマンフィルタ (1)

対象システム (時変系):

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + D(k)w(k)$$
$$y(k) = C(k)x(k) + v(k)$$

$w(k)$, $v(k)$ の各要素は白色ガウス雑音で、

$$E[v(k)] = 0, \quad E[v^T(k)v(\ell)] = \delta_{k\ell}V(k)$$
$$E[w(k)] = 0, \quad E[w^T(k)w(\ell)] = \delta_{k\ell}W(k)$$

ただし、$w(k)$ と $v(k)$ は無相関。

ここでの目的は、観測できる信号 (入力 u と出力 y) から、現在の状態 $x(k)$ の期待値 (最尤推定量) を求めること。

ノイズ $w(k)$, $v(k)$ は観測できないことに注意。

$y(0),\ldots,y(k'),u(0),\ldots,u(k')$ が分かっている時の、$x(k)$ ($k \geq k'$) の期待値を $\tilde{x}(k|k')$ と書く。

離散時間カルマンフィルタ

$$\tilde{x}(k|k) = \tilde{x}(k|k-1) + K(k)\{y(k) - C(k)\tilde{x}(k|k-1)\}$$
$$\tilde{x}(k|k-1) = A(k-1)\tilde{x}(k-1|k-1) + B(k-1)u(k-1)$$

カルマンゲイン $K(k)$ の決定:

$$K(k) = P(k|k)C^T(k)V^{-1}(k)$$
$$M(k|k-1) = A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1) + D(k-1)W(k-1)D^T(k-1)$$
$$P(k|k) = [I - K(k)C(k)]M(k|k-1) = \{M^{-1}(k|k-1) + C^T(k)V^{-1}(k)C(k)\}^{-1}$$

離散時間カルマンフィルタ (3)

- ✔ 初期値は、$\tilde{x}(0|0) = E\{x(0)\}$,
  $P(0|0) = E\{(x(0) - E\{x(0)\})(x^T(0) - E\{x(0)\})\}$ とする。
- ✔ ガウス性が成り立たない場合は、得られる推定値は最尤推定量ではないが、最小二乗誤差を最小とする。
- ✔ カルマンゲインはオフラインで計算しておくとよい。

離散時間定常カルマンフィルタ (1)

時不変系 (A, B, C, D, V, W がすべて定数) に対し、(A, C) が可観測の場合、$P(k|k)$ はある値 P に収束する。
→ **定常カルマンフィルタ**

また、(A, D) が可到達の場合は、P は正定値行列である。

離散時間定常カルマンフィルタ:

$$\tilde{x}(k) = (I - KC)A\tilde{x}(k-1) + Bu(k-1) + Ky(k)$$

ただし、$K = PC^TV^{-1}$
定常ゲインの導出:

$$APA^T - P + DWD^T - PC^T(V - CPC^T)^{-1}CP = 0$$

$$\text{あるいは、}(APA^T + DWD^T)^{-1} + C^TV^{-1}C = P^{-1}$$

これの正定解 $P > 0$ を採用

離散時間定常カルマンフィルタ (2)

追従誤差 $e(k) = x(k) - \tilde{x}(k)$ は、$w(k) = 0$, $v(k) = 0$ のとき、

$$e(k+1) = (I - KC)Ae(k)$$

$(I - KC)A$ の安定性がカルマンフィルタの安定性を支配する。

(A, D) が可到達、(A, C) が可観測であれば、$(I - KC)A$ は安定

M に関する方程式 (Riccati 型):

$$AMA^T - M + DWD^T - AMC^T(CMC^T + V)^{-1}CMA^T = 0$$

[参考]　逆行列の補助定理:　A, $A + BC$, $I + CA^{-1}B$ が正則ならば、

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

白色雑音下の連続時間系 (1)

ホワイトノイズが入る連続時間系:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + Dw$$
$$y = C(t)x + v$$

$w(t)$, $v(t)$ の各要素は白色ガウス雑音で、

$$E[v(t)] = 0, \quad E[v^T(t)v(t')] = \delta(t-t')V$$
$$E[w(t)] = 0, \quad E[w^T(t)w(t')] = \delta(t-t')W$$

ただし、$w(t)$ と $v(t)$ は無相関。

x は時間に関して微分不可能なので、これは正しい表現ではない。
しかし、このほうが理解しやすいだろう

白色雑音下の連続時間系 (2)

正しい表記 (伊藤の微分方程式):

$$
\begin{aligned}
dx &= A(t)x\,dt + B(t)u\,dt + DW^{1/2}d\theta \\
y &= C(t)x + v
\end{aligned}
$$

- ✔ θ の各要素は独立な標準ウィーナー過程。
  大ざっぱにいえば、

$$
\int_{-\infty}^{t} w(\tau)d\tau = W^{1/2}\theta
$$

  でブラウン運動・ランダムウォークとも呼ばれる。
- ✔ 伊藤の微分方程式の両辺にインテグラルを付けて考えても良い。この場合の積分は、リーマン・スティルテェス積分の意味になる。

連続時間カルマンフィルタ

連続時間系をサンプリング周期 T でサンプリングし、サンプル値系に対する離散時間カルマンフィルタの極限 $(T \to +0)$ を考える。

連続時間カルマンフィルタ:

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + B(t)u + K(t)[C(t)\tilde{x} - y]$$
$$K(t) = -P(t)C^T(t)V^{-1}$$

共分散行列の推定値 $P(t)$ に関する微分方程式 (**リカッチ微分方程式**):

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + D(t)W(t)D^T(t)\\ &\quad - P(t)C^T(t)V^{-1}C(t)P(t)\end{aligned}$$

初期値: $\tilde{x}(0) = E[x(0)]$, $P(0) = E[(x(0) - E[x(0)])^T(x(0) - E[x(0)])]$

ガウス分布の過程の下で、$\tilde{x}$ は x の最尤推定量を与える。

連続時間定常カルマンフィルタ (1)

時不変系:

$$dx = Axdt + Budt + Dd\theta, \quad y = Cx + v$$

において、十分大きな t に対して P が収束したとする。

定常カルマンフィルタ:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K(C\tilde{x} - y), \quad K = -PC^TV^{-1}$$

リカッチ代数方程式:

$$AP + PA^T + DWD^T - PC^TV^{-1}CP = 0, \quad P \text{ は正定行列}$$

- ✔ リカッチ代数方程式は有本・ポッター法によって解くことができる。後の最適レギュレータのときに有本・ポッター法について説明する。
- ✔ 定常カルマンフィルタは全状態オブザーバと全く同じ形をしている。オブザーバゲインの決定がリカッチ方程式による点だけが異なる。

連続時間定常カルマンフィルタ (2)

定理: (A, D) が可制御, (A, C) が可観測, W, V が正定と仮定する。そのとき、以下の 3 つが成り立つ。

1. 代数リカッチ方程式の正定解が唯一存在する。
2. $A + KC$ が漸近安定となる代数リカッチ方程式の解 P が唯一存在し、1. の正定解と一致する。
3. リカッチ微分方程式の解 $P(t)$ は、$t \to \infty$ のとき代数リカッチ方程式の正定解 P に漸近する。

$$\begin{aligned}(A+KC)^T P^{-1} + P^{-1}(A+KC) &= A^T P^{-1} + P^{-1} A - 2C^T V^{-1} C \\ &= -P^{-1} D W D^T P^{-1} - C^T V^{-1} C\end{aligned}$$

$y = V^{-1/2} C x$ からみて可観測。

最適レギュレータ

最適制御問題

典型的な問題設定 (終端時間 T 固定, 終端条件なし):

- ✔ **制御対象**: $\dot{x} = f(x) + g(x)u$
- ✔ **評価規範 (Bolza 型)**:

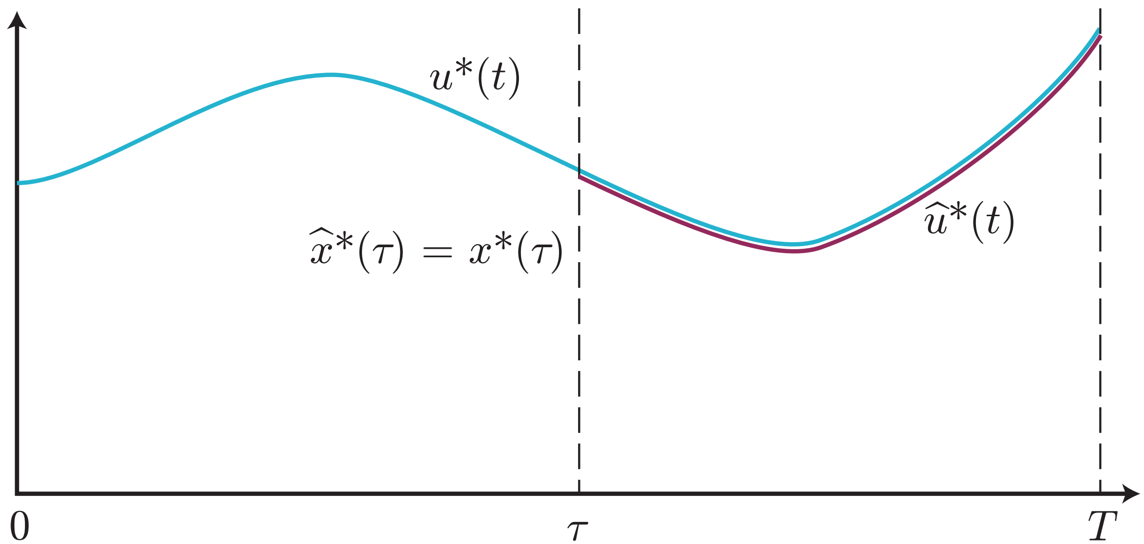
$$J(x(0); u(\cdot)) = E(x(T)) + \int_0^T L(x, u)dt$$
$$= E(x(T)) + \int_0^T L_0(x) + \frac{1}{2}u^T R(x)u\, dt \to \min$$

  ここで、$R(x)$ は正定とする。
- ✔ **初期値**: $x(0) = x_0$
- ✔ 今回は、入力制約は考えない。

最適性の原理

制御区間を $[0, T]$ としたときの最適制御の解を $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ とする。
制御区間を $[\tau, T]$, 初期値を $x^*(\tau)$ としたときの最適制御の解を $\{\hat{x}^*(\cdot), \hat{u}^*(\cdot)\}$ とすると、

$$\hat{x}^*(t) = x^*(t), \quad \hat{u}^*(t) = u^*(t), \quad t \in [\tau, T]$$



$\boxed{\text{最適制御 } u^*(t) \text{ の値は、そのときの状態と残り時間 } T - t \text{ で記述可能}}$

このとき初期値 $x(0)$ は不要

Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程式の導出 (1)

値関数: $V(x,t)$

$$V(x,t) \triangleq \inf_{u(\cdot)} \left[E(x(T)) + \int_t^T L(x,u)dt \right]$$

つまり、その時刻以降に加算される最小のコストを、現在の x と t の関数で表現したもの。

Bellman の最適性の原理より、微小な dt に関して

$$V(x(t),t) = \inf_{u(\cdot)} \left[\int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau))d\tau + V(x(t+dt),t+dt) \right]$$

Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程式の導出 (2)

$V(\cdot)$ の微分可能性を仮定し、dt に関するオーダ評価:

$$V(x(d+dt), t+dt)$$
$$= V(x(t), t) + \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(f(x(t)) + g(x(t))u) + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + O(dt^2)$$

これを代入し $dt \to 0$ の極限をとる。

Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程式 (HJB 方程式):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \inf_u \left[L(x,u) + \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \right] = 0$$
$$V(x,T) = E(x)$$

無限制御区間の場合 — Hamilton-Jacobi 方程式

- ✔ $f(0)=0$, かつ $L_0(x)$ が正定と仮定。
- ✔ 無限制御区間問題 ($T=+\infty$, $E(\cdot)=0$) である。この場合は、値関数は x だけの関数。

Hamilton-Jacobi 偏微分方程式 (HJ 方程式):

$$\inf_u \left[L(x,u) + \frac{\partial V}{\partial x}(f(x)+g(x)u) \right] =$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + L_0(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} g(x) R(x)^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T = 0$$

$$V(0)=0$$

最適入力は $L(x,u)+(\partial V/\partial x)(f(x)+g(x)u)$ を最小化する

$$u = u^*(x) = -R(x)^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$$

Hamilton-Jacobi 方程式の解について (1)

HJ 方程式の解は複数存在する。

$f(0)=0$, $R>0$, $L_0(x)$ は正定，システムは漸近安定化可能と仮定。

以下の 3 つは同値である。

(a) $V(x)$ は微分可能な値関数。
(b) $V(x)$ は Hamilton-Jacobi 方程式の正定解。
(c) Hamilton-Jacobi 方程式の解 $V(x)$ のもとで $u=u^*(x)$ は原点を漸近安定化する。

Hamilton-Jacobi 方程式の解について (2)

証明:

(a)→(b): 値関数および各種仮定より明らか。

(b)→(c): $V(x)$ をリアプノフ関数とし、

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f'(x) - \frac{\partial V}{\partial x} g(x) R(x)^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T = -L(x, u^*) \leq -L_0(x)$$

となり漸近安定。

(c)→(a): 恒等式

$$\begin{aligned} & J(x(0); u(\cdot)) \\ &\quad = V(x(0)) - V(x(+\infty)) + \frac{1}{2}\int_0^\infty (u - u^*(x))^T R(x)(u - u^*(x))dt \end{aligned}$$

より、"$u = u^*(x)$ が原点を漸近安定化する $V(x)$" は値関数の定義を満たす。

LQ 最適制御問題 (1)

線形系の場合について考える。

制御対象: 線形系 (可制御性を仮定)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

評価規範: 2 次形式 ($R > 0$, $Q > 0$)

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt$$

$\Rightarrow$ Linear-Quadratic 最適制御問題 (LQ 最適制御問題)

LQ 最適制御問題 (2)

値関数を

$$V(x) = x^T P x + S(x), \quad S(x) = O(x^3)$$

とし、HJ 方程式に代入

HJ 方程式の 2 次項:

$$x^T (PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P)x = 0$$

HJ 方程式の 3 次以上の項:

$$S_x(x)Ax + x^T A^T S_x(x)^T - S_x(x)BR^{-1}B^T Px \\ - x^T PBR^{-1}B^T S_x(x)^T - S_x(x)BR^{-1}B^T S_x(x)^T = 0$$

$$\Rightarrow S(x) = 0$$

LQ 最適制御問題 (3)

LQ 問題の解

Riccati 方程式:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

の正定解 P (唯一に存在)

最適制御則:

$$u = -R^{-1}B^T Px$$

最適制御則は漸近安定化制御則

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T(PA + AP - 2PBR^{-1}B^T P)x \\ &= -x^T(Q + PBR^{-1}B^T P)x < 0 \quad (x \neq 0)\end{aligned}$$

Riccati 方程式の解法 (1)

Riccati 方程式の解法 (**有本-Potter 法**) について述べる。

随伴変数の定義: $p = Px$

最適制御則の下での制御対象:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^TPx = Ax - BR^{-1}B^Tp$$

随伴方程式:

$$\dot{p} = (PA - PBR^{-1}B^TP)x = -(A^TP + Q)x = -Qx - A^Tp$$

以上まとめると**正準方程式**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = A_H\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

A_H を**ハミルトニアン行列**という。

Riccati 方程式の解法 (2)

ハミルトニアン行列の性質: A_H が固有値 λ を持つならば、$-\lambda$ も A_H の固有値である。

証明　A_H が

$$(\lambda I - A_H)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0$$

なる固有値 λ と右固有ベクトル $(f^T, g^T)^T$ を持つとする。そのとき、$(-g^T, f^T)(-\lambda I - A_H) = 0$ が成り立つことが簡単な計算でわかる。つまり、A_H は固有値 $-\lambda$ と左固有ベクトル $(-g^T, f^T)$ を持つ。□

漸近安定化された閉ループ系を正準方程式系の一部として含むことより、A_H には少なくとも n 個安定な固有値を含む。つまり LQ 最適制御問題の正準方程式系は、n 個の安定な固有値と n 個の反安定な固有値を持つ。

この場合のハミルトニアン行列 A_H は虚軸上に固有値を持たない。この性質を正準方程式系が双曲的であるという。

Riccati 方程式の解法 (3)

漸近安定化された閉ループ系は、「A_H の安定な固有値に対応する n 次元の固有ベクトル空間」に正準方程式系を制約したダイナミクス。

つまり、上記固有ベクトル空間上の点が $p = Px$ なる関係を満たす。

A_H の安定な固有値に対する固有ベクトル空間:

$$A_H \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

Λ: n 個の安定な固有値と同じ固有値を持つ行列
すると、その固有ベクトル空間上に $(x^T, p^T)^T$ がある。

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Px \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} k$$

$x = S_1 k$, $Px = S_2 k$ から係数 k を消去すると、$Px = S_2 S_1^{-1} x$

Riccati 方程式の解は、$P = S_2 S_1^{-1}$

H_∞ 制御の基礎

RH_∞

以下の用語の定義を用いる。

- ✔ 伝達関数行列 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ を以下のように表記する。

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

- ✔ 有理行列 $G(s)$ が**プロパー**とは、$s \to \infty$ のときの $G(s)$ の最大特異値が有界: $\sigma_{\max}[G(\infty)] < \infty$

$$G(s) \text{ がプロパー} \iff G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \text{ と表される}$$

- ✔ $G(s)$ が RH_∞ であるとは、プロパーで安定な実有理行列であること。

$$G(s) \in RH_\infty \iff G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right],\ \mathrm{Re}\,\lambda[A] < 0$$

H_∞ ノルム

- $\mathrm{Re}\, s > 0$ の領域で解析的かつ有界な関数 $f(s)$ の H_∞ ノルムは、

$$\|f(s)\|_\infty = \sup_{\mathrm{Re}\, s>0} \sigma_{\max}[f(s)]$$

- $G(s) \in RH_\infty$ の H_∞ ノルムは、

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

- $G(s)$ がスカラーの場合、H_∞ ノルムは「安定な伝達関数のゲインの最大値」
- $G(s) \in RH_\infty$ (ただし $G(\infty) = D = 0$) の H_2 ノルムは、

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\left[G(j\omega)^* G(j\omega)\right] d\omega}$$

L_2 ノルムとの関係 (1)

$G(s) \in RH_\infty$ とする。$\|G(s)\| \leq \gamma$ は、$\gamma^2 I - G(-j\omega)^T G(j\omega) \geq 0$ と書ける。
$Z(s) = G(s)W(s)$, $z(t) = \mathscr{L}^{-1}[Z(s)]$, $w(t) = \mathscr{L}^{-1}[W(s)]$ として、パーセバルの公式より、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty z(t)^T z(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty Z(-j\omega)^T Z(j\omega)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty W(-j\omega)^T G(-j\omega)^T G(j\omega)W(j\omega)d\omega \\
&\leq \frac{\gamma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty W(-j\omega)^T W(j\omega)d\omega = \gamma^2\int_0^\infty w(t)^T w(t)dt
\end{aligned}$$

L_2 ノルムとの関係 (2)

実際にはより強く

初期値ゼロとすると、

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$$

ただし、時間信号の $\|\cdot\|_2$ は L_2 ノルムである。

また同様に、

1 出力系を考える。初期値ゼロとすると、

$$\|G(s)\|_2 = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_2}$$

ここで、時間信号の $\|\cdot\|_\infty$ は L_∞ ノルムである。

Riccati 方程式との関連 (1)

$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \in RH_\infty$ を考える。ただし、(A, B, C, D) は最小実現と仮定する。
$\|G(s)\| \leq \gamma \iff \|z(t)\|_2^2 - \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \leq 0$ なので、この不等式の左辺を最大化する「最悪外乱 $w(t) = w^*(t)$」を考えよう。

$$\int_0^\infty x^T C^T C x - \gamma^2 w^T w \, dt \to \max$$

$D = 0$ とし、最適制御問題と同様に Riccati 方程式を作ると、

$$A^T X + XA + \gamma^{-2} X B B^T X + C^T C = 0, \quad X > 0$$

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2} B^T X x$$

X の二乗項の符号がプラスであることに注意。

Riccati 方程式との関連 (2)

逆にこのとき、

$$
\begin{aligned}
&x(T)^T X x(T) - x(0)^T X x(0) = \\
&\quad \int_0^T (Ax+Bw)^T X x + x^T X (Ax+Bw) dt \\
&\quad = \int_0^T w^T B^T X x + x^T X B w - x^T C^T C x - \gamma^{-2} x^T X B B^T X x dt \\
&\quad = \int_0^T -\gamma^2 (w-w^*)^T (w-w^*) - x^T C^T C x + \gamma^2 w^T w dt \\
&\quad \leq \int_0^T -\|z\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 dt
\end{aligned}
$$

つまり、$x(0)=0$ のとき L_2 ゲイン条件を満たす。
ただし、解の一意性, $w=w^*$ の下での内部安定性はよくわからない。
$\Rightarrow$ $w=w^*$ の下で内部安定となる X を**安定化解**という。
この場合、安定化解は正定解。

Riccati 方程式との関連 (3)

Riccati 方程式は不等式でもかまわないことがわかる。

以下の 2 つは同値

(1) $\gamma > \|C(sI - A)^{-1}B + D\|_\infty$

(2) $\gamma^2 I - D^T D > 0$ かつ

$$A^T X + XA + (XB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T X + D^T C^T) + C^T C < 0$$

を満たす正定解 $X > 0$ が存在する。

Riccati 方程式との関連 (4)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{bmatrix} < 0 \iff A + BC^{-1}B^T < 0,\ C > 0$$

$A + BC^{-1}B^T$ を Shur Complement という。

すると、Riccati 不等式

$$A^T X + XA + (XB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T X + D^T C^T) + C^T C < 0$$

は、X と γ^2 に関する線形行列不等式 (LMI)

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ (XB + C^T D)^T & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix} < 0,\ X = X^T > 0$$

に変形可能。γ^2 の最小化を行う最適化を内点法で計算可能。
(極小値と最小値の違いの煩雑さは残るが...)

H_2 ノルムの計算

可観測性グラミアン:

$$L_O = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt > 0$$

はリアプノフ方程式

$$A^T L_O + L_O A + C^T C = 0$$

から得られる。
ノルムの定義式にパーセバルの定理を適用して $G(s)$ のインパルス応答を代入すると、

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \mathrm{tr}[B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B] dt} = \sqrt{\mathrm{tr}[B^T L_O B]}$$

H_∞ 制御問題 (状態フィードバック) (1)

制御対象:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$
$$z = Cx + D_1 w + D_2 u$$

✔ $x \in \mathbb{R}^n$: 状態ベクトル, $w \in \mathbb{R}^m$: 外乱などの外生信号
$u \in \mathbb{R}^\ell$: 制御入力, $z \in \mathbb{R}^p$: 評価出力

問題設定: 外乱 w から出力 z までの H_∞ ノルム (= L_2 ノルム比) が、あらかじめ決定された値 γ (> 0) 以下であるような制御入力 u を設計する。

仮定: 問題を簡単にするため、

$$D_1 = 0, \quad C^T D_2 = 0 \text{ (直交条件)}, \quad \operatorname{rank} D_2 = \ell$$
$$(A, B_2)\text{: 可制御 (可安定)}, \quad (A, C)\text{: 可観測 (可検出)}$$

H_∞ 制御問題 (状態フィードバック) (2)

L_2 ノルム比が γ 以下なので、以下の問題を考えることと同じ。

評価関数:

$$J(x_0, w, u) = \int_0^\infty \|z(\tau)\|^2 - \gamma^2 \|w(\tau)\|^2 \, d\tau$$

を考え、$x_0 = 0$ のとき、全ての $w(\cdot) \in L_2$ に対して、J が非正となるような、フィードバック $u = K_2 x$ を求める問題。

仮定より、

$$J(x_0, w, u) = \int_0^\infty x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w \, dt$$

二人ゼロ和微分ゲーム (1)

H_∞ **制御における二人零和微分ゲーム**: 一方のプレーヤーは入力 u により評価関数を最小化することを目的とし、もう一方のプレーヤーは外乱 w を制御することにより同じ評価関数を最大化することを目的とする。

それぞれのプレーヤーにとって最適な戦略 (= 最悪外乱・制御則)

$$w = K_1^* x, \qquad u = K_2^* x$$

が存在し

$$J(x_0, w, K_2^* x) \leq J(x_0, K_1^* x, K_2^* x) \leq J(x_0, K_1^* x, K_2^* x),$$
$$^\forall w, {}^\forall u \in \mathfrak{U}(x_0, K_1^* x)$$

とすることが可能であるならば，その K_1^*, K_1^* を見つけよ。

$\mathfrak{U}(x_0, K_1^* x)$ は、$w = K_1^* x$ のもとで、$x \to 0$ $(t \to \infty)$ となる $u(\cdot)$ の集合。

二人ゼロ和微分ゲーム (2)

最適レギュレータと同様に Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を作る。

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

$$\inf_u \sup_w \left[x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w + \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + B_1 w + B_2 u) \right] = 0$$

最適レギュレータと同様に線形システムと 2 次形式評価規範の下では、値関数も 2 次形式で $V(x) = x^T P x$。

$$\begin{aligned} \inf_u \sup_w \big[& x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w \\ & + x^T P (Ax + B_1 w + B_2 u) + (Ax + B_1 w + B_2 u)^T P x \big] = 0 \end{aligned}$$

$p = Px$ とおいた大かっこの中を Hamiltonian という。

Hamiltonian の鞍型点

Hamiltonian の鞍型点を平方完成することで求める。

$$
\begin{aligned}
&x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w \\
&\qquad + x^T P(Ax + B_1 w + B_2 u) + (Ax + B_1 w + B_2 u)^T P x \\
&= x^T C^T C x + (u + R^{-1} B_2^T P x)^T R (u + R^{-1} B_2^T P x) \\
&\quad - x^T P x B_2 R^{-1} B_2^T P x + \\
&\quad - \gamma^2 (w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x)^T (w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} x^T P B_1 B_1^T P x + x^T (PA + A^T P) x
\end{aligned}
$$

ただし、$R = D_2^T D_2$ (> 0)。よって鞍形点は

$$
\begin{aligned}
w &= K_1^* x = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x \\
u &= K_2^* x = -R^{-1} B_1 P x
\end{aligned}
$$

Riccati 方程式

鞍形点を HJB 方程式に代入すると

Riccati 方程式:

$$PA + A^T P + C^T C + P\left(\frac{1}{\gamma^2}B_1 B_1^T - B_2 R^{-1} B_2^T\right)P = 0$$

このケースでは、正定解と安定化解が微妙に異なることがある。
しかも、それらが存在するとは限らない。

L_2 ノルム比の確認

Riccati 方程式の正定解 $P > 0$ を用いた $u = K_2^* x = -R^{-1} B_1 P x$ は、

- ✔ $w \to z$ の L_2 ノルム比を γ 以下にする。
- ✔ $w = 0$ のときフィードバック系は安定

1 つめは、

$$x(T)^T P x(T) - x(0)^T P x(0) + \int_0^T \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 dt \leq 0, \quad {}^\forall w$$

より、$x(0) = 0$ を代入すると証明できる。安定性は、$V(x) = x^T P x$ をリアプノフ関数とすると、

$$\dot{V} \leq -\|z\|^2$$

なので可観測性より証明できる。

安定化解

$w = K_1^* x = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x$, $u = K_2^* x = -R^{-1} B_1 P x$ のもとでシステムが漸近安定となる Riccati 方程式の解 P を安定化解という。
安定化解を用いた $x^T P x$ は値関数。

つまり、実際に欲しいのは正定な安定化解。

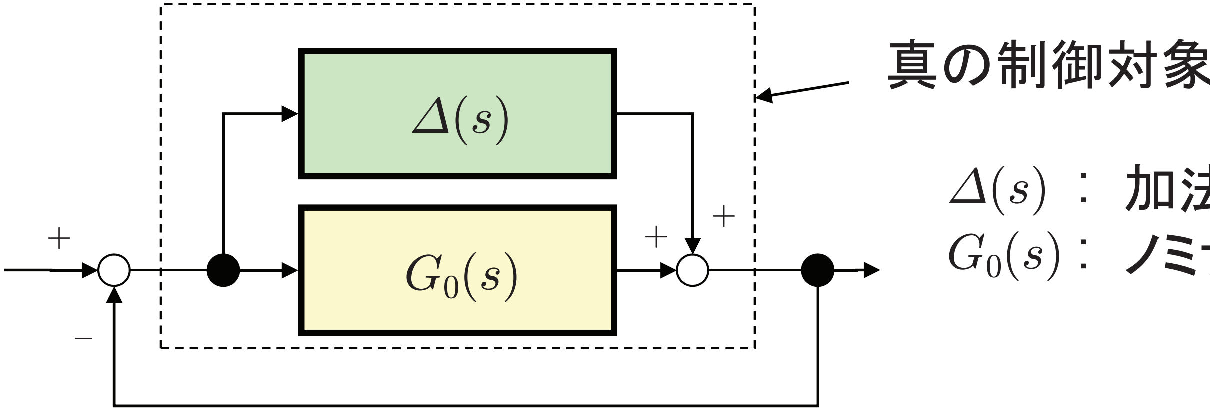
ロバスト制御 (1)

ロバスト性: 外乱・モデル化誤差の影響を受けないこと。

線形の $\mathcal{H}_\infty$ 制御: 外乱から評価出力までの伝達関数のノルム (=$\mathcal{H}_\infty$ ノルム) をある値以下に押さえる制御

線形系では、$\mathcal{H}_\infty$ ノルムと $\mathscr{L}_2$ ゲインは等しいので、非線形系でも $\mathscr{L}_2$ ゲインを使って、同じ事ができる。

線形のロバスト安定性



$\Delta(s)$: 加法的変動
$G_0(s)$: ノミナルな制御対象

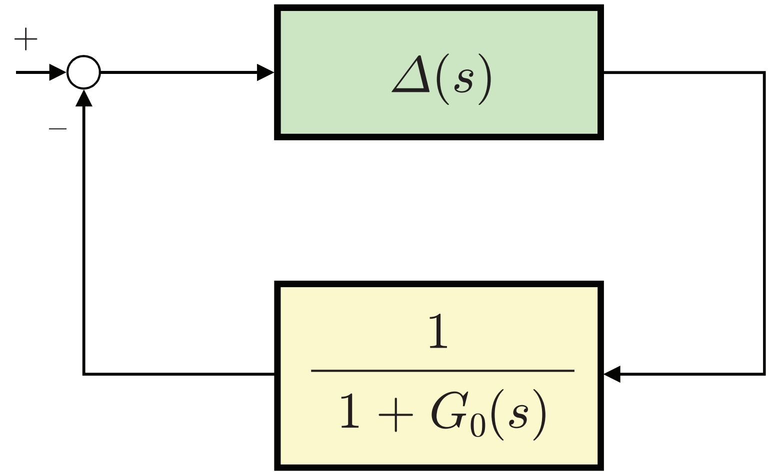
条件:

- ✔ $\Delta(s)$ そのものは安定
- ✔ $|\Delta(j\omega)| < h(\omega)$ なる正の関数 $h(\omega)$ が既知

そのような全ての $\Delta(s)$ に関して閉ループ系が安定となる必要十分条件

- ✔ $\Delta(s) = 0$ のときの閉ループ系が安定、かつ
- ✔ $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$

ロバスト制御 (3)



一巡伝達関数の位相情報は不明 $\rightarrow$ ゲイン条件だけ

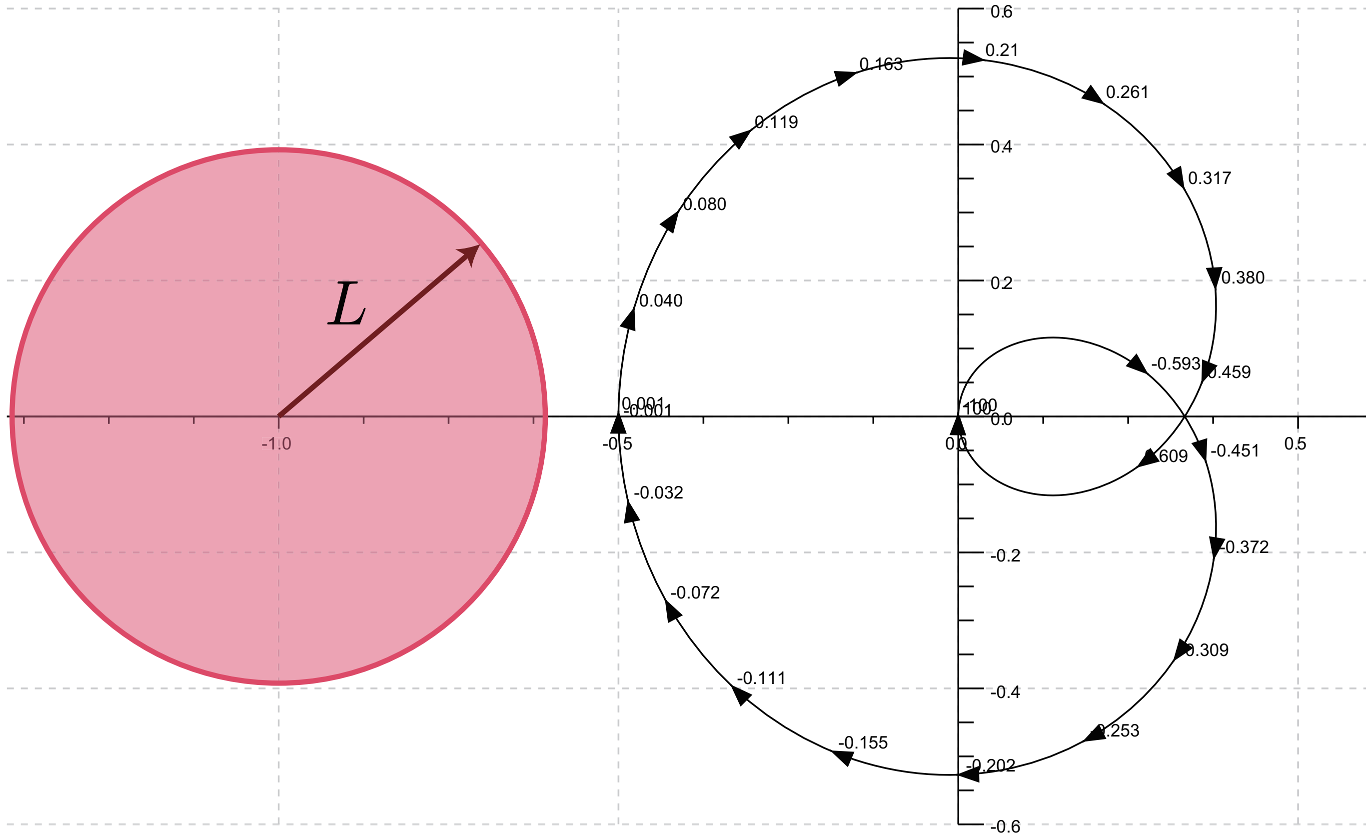
$$\left|\Delta(j\omega)\frac{1}{1+G_0(j\omega)}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |\Delta(j\omega)| < |1+G_0(j\omega)|$$

$$\Rightarrow \quad |1+G_0(j\omega)| > h(\omega)$$

キーポイントは、ループ内ゲインを 1 以内に押さえるということ。$\Rightarrow$ 未知部分に入る入力の「大きさ」を小さくする。

ロバスト制御 (4)

$h(\omega)$ が定数 L のとき



ナイキスト線図が円内に入らないことが 2 番目の条件