

# 「デジタル制御」(後半)

北海道大学 大学院情報科学研究科 山下 裕

2013 年後期・3 年生対象

## 出力フィードバック

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

これから以降は、連続時間系に戻り、より進んだ制御手法の説明を行う。また、適宜、離散時間系に関して補足する。

制御対象:  $\dot{x} = Ax + Bu$   
 $y = Cx$

静的な出力フィードバック:  $u = Ky$   
(状態フィードバックと異なり、全ての極を指定できない)

動的な出力フィードバック:  $\dot{\xi} = P\xi + Qu + Ry$   
 $u = K_1\xi + K_2y$   
可制御・可観測ならば、すべての極を指定可能。

動的な出力フィードバックの設計手法:  
「状態フィードバック」+「オブザーバ」

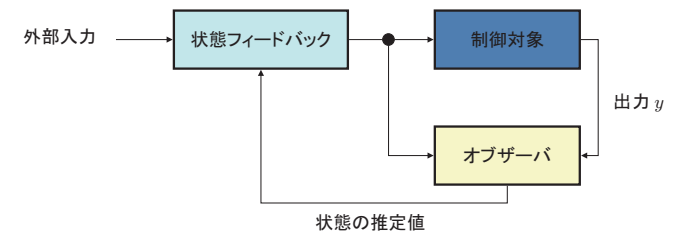
- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

## オブザーバ

## オブザーバ

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

- ✓ **オブザーバ** (状態推定器) とは、状態  $x$  が直接観測できないとき、出力  $y$  と入力  $u$  から  $x$  を推定する機構
- ✓ 出力の次元は状態の次元より少ないのが普通 → 出力の瞬間値だけからでは、状態は推定できない。
- ✓ そこで、過去の履歴の情報も用いる。つまり、オブザーバ自体も微分方程式で表現される。→ 動的フィードバック



## 同一次元オブザーバの構成

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

- ✓ **制御対象:**  $\dot{x} = Ax + Bu$   
 $y = Cx$
- ✓ **制御対象のコピー:**  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$   $\hat{x}$  は  $x$  の推定値。  
 $\hat{y} = C\hat{x}$
- ✓ このままでは、初期推定誤差がゼロに収束する保証がない。そこで、出力の差  $\hat{y} - y = C\hat{x} - y$  により、制御対象のコピーの動きを修正。

同一次元オブザーバ:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(C\hat{x} - y) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}$$

赤字の部分は、修正項

## オブザーバの固有値 (1)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

- ✓ オブザーバの固有値 =  $A + KC$  の固有値
- 疑問:  $K$  を選ぶことで、オブザーバの固有値を自由に選べるだろうか?

- ✓  $A + KC$  の固有値 =  $(A + KC)^T$  の固有値 =  $A^T + C^T K^T$  の固有値
- ✓ **双対なシステムの極配置問題**

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A^T z + C^T v \\ v &= K^T z\end{aligned}$$

$K^T$  を選ぶことで  $A^T + C^T K^T$  の固有値を自由に選べるか? → 元の系のオブザーバの固有値配置問題と同じ

- ✓ 「**双対なシステムの極配置問題**」と等価 = 必要十分条件は双対なシステムの可制御性つまり、

オブザーバの固有値配置が自由にできる必要十分条件は可観測であること

## 推定誤差

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

### 推定誤差

$$e = x - \hat{x}$$

### 推定誤差のダイナミクス

$$\begin{aligned}\dot{e} &= [Ax + Bu] - [A\hat{x} + Bu + K(C\hat{x} - y)] \\ &= A(x - \hat{x}) + KC(x - \hat{x}) \\ &= (A + KC)e\end{aligned}$$

( $A + KC$ ) が漸近安定ならば、推定誤差はゼロに漸近

## オブザーバの固有値 (2)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

### 可観測正準形:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) x\end{aligned}$$

### 誤差システム:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & & -a_0 + k_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 & -a_{n-1} + k_{n-1} \end{bmatrix} e$$

ただし、 $K = (k_0, \dots, k_{n-1})^T$

多項式  $s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_0 - k_0)$  が目標の特性多項式になるように  $K$  を選ぶ

## 分離定理 (1)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

- ✓ 制御対象:  $\dot{x} = Ax + Bu$   
 $y = Cx$
- ✓ 状態フィードバックを設計:  $u = Fx$   
→  $A + BF$  が望ましい固有値を持つように設計
- ✓ オブザーバを設計:  
→  $A + KC$  が望ましい固有値を持つように設計
- ✓ この2つを組み合わせる。つまり、 $u = Fx$  のかわりに、推定値を用いて  $u = F\hat{x}$  を採用

推定値を用いることで、 $A + BF$  の固有値が変化しないであろうか?  
→ 結論としては「問題ない」(次のページ参照)

## 最小次元オブザーバ (1)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

- ✓ 全状態オブザーバは、 $n$  個の状態を推定。しかし、 $y = Cx$  により状態の一部は既にわかっているはず。
- ✓ 状態を推定するためには、 $n - l$  本の微分方程式でよいのでは? → **最小次元オブザーバ**

以降では、1 出力 ( $l = 1$ ) の場合の最小次元オブザーバについて考える。

## 分離定理 (2)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

拡大系:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A + KC \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

つまり、フィードバック系の固有値は、 $A + BF$  の固有値と  $A + KC$  の固有値をあわせたもの。

オブザーバの設計と独立に、状態フィードバックの設計を行ってよい  
→ **制御と観測の分離 = 分離定理**

線形系だから分離定理が成り立っている。非線形系では成り立たない。

## 最小次元オブザーバ (2)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

可観測正準形:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u$$
$$y = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) x$$

座標変換:

$$w = Qx = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & s_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & s_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

## 最小次元オブザーバ (3)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

### 座標変換後のシステム:

$$\dot{w} = A_1 w + b_1 u, \quad y = C_1 w$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & & -s_0 & -s_{n-2}s_0 - a_n + a_1s_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -s_{n-2}s_1 - a_{n-1} + a_1s_1 + s_0 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -s_{n-2} & -s_{n-2}^2 - a_2 + a_1s_{n-2} + s_{n-3} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 + s_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = cQ^{-1} = (0, \dots, 0, 1), \quad b_1 = Qb$$

変換後の状態  $w$  の最後の要素は  $y$  そのものなので、次のようにおく。

$$w = \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}$$

## 最小次元オブザーバの安定性

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

- ✓ 推定誤差:  $e_\xi = \xi - \tilde{\xi}$
- ✓ 推定誤差のダイナミクス:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\xi &= \{A_2\xi + py + b_2u\} - \{A_2\tilde{\xi} + py + b_2u\} \\ &= A_2e_\xi \end{aligned}$$

最小次元オブザーバの安定性は  $A_2$  の安定性で決まる

よって、

$$\det[\lambda I - A_2] = \lambda^{n-1} + s_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + s_1\lambda + s_0$$

が安定多項式になるように、 $s_0, \dots, s_{n-2}$  を選ぶ。

## 最小次元オブザーバ (4)

- オブザーバ
- 出力フィードバック
- オブザーバ
- 同一次元オブザーバの構成
- 推定誤差
- オブザーバの固有値
- 分離定理
- 最小次元オブザーバ
- 最小次元オブザーバの安定性
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

変換後のシステムに対し同一次元オブザーバを作る

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A_2 & p \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u$$

最後の要素  $y$  は推定する必要が無いので、上の  $n-1$  本の式を抜き出す

### 最小次元オブザーバ:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} &= A_2\tilde{\xi} + b_2u + py \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & & -s_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -s_{n-2}s_0 - a_n + a_1s_0 \\ -s_{n-2}s_1 - a_{n-1} + a_1s_1 + s_0 \\ \vdots \\ -s_{n-2}^2 - a_2 + a_1s_{n-2} + s_{n-3} \end{pmatrix} \\ \tilde{x} &= Q^{-1}(\tilde{\xi}^T, y)^T \end{aligned}$$

## リアプノフ安定論

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- 平衡点
- 安定性の定義
- Lyapunov 関数の概念
- Lyapunov の安定定理
- $V$  の計算法
- 2 次形式と正定行列
- 線形系の場合
- 離散時間の場合
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

## 平衡点

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

自律的システム:

$$\dot{x} = f(x)$$

において、 $f(x_0) = 0$  となる点  $x_0$  を平衡点 (equilibrium (point), 特異点) という。

- ✓ 通常は、状態  $x$  を平行移動するように再定義し、原点  $x = 0$  を平衡点として論ずる場合が多い。⇒ 一般性は失われない。
- ✓ 平衡点では  $\dot{x} = 0$ 、すなわち解は停留する。
- ✓ 以降では、この平衡点の安定性に関して述べる。

デジタル制御

2013 年後期 - 17 / 76

## 安定性の厳密な定義 — 復習 (1)

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

### 有界性: Boundedness

系  $\dot{x} = f(x)$  において、平衡点近傍  $U$  の初期値  $x(0)$  から出発した解が有界であるとは、初期値によって定まる状態のノルム上界  $K(x(0))$  が存在し、 $\|x(t)\| \leq K(x(0)), t \geq 0$  となることである。

### (局所) 安定性: (Local) Stability → LS

系  $\dot{x} = f(x)$  の平衡点  $x = 0$  が (局所) 安定であるとは、全ての  $\epsilon > 0$  に対して  $\delta(\epsilon) > 0$  が存在し、以下が成り立つこと。

$$\|x(0)\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t; x(0))\| < \epsilon, t \geq 0$$

- ✓ (安定な系)  $\subset$  (ある原点近傍を初期値とする解が有界な系)
- ✓ 安定な系では、原点近傍から出発した解は原点近傍に留まる。(リミットサイクルのような場合、軌道は有界だが、原点は不安定。)
- ✓ (局所) 安定性のことを Lyapunov 安定性ということがある。
- ✓ (局所) 安定性の主語は 'システム' ではなく '平衡点' である。

デジタル制御

2013 年後期 - 18 / 76

## 安定性の厳密な定義 — 復習 (2)

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

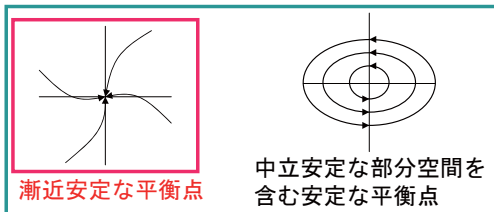
$H_\infty$  制御の基礎

### 吸引力: Attractiveness

原点近傍  $U$  が存在し、その近傍を初期値  $x(0)$  とする解が、 $\|x(t; x(0))\| \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$  ならば、原点は吸引的であるという。また、そのとき  $U$  を吸引領域という。

### (局所) 漸近安定性: (Local) Asymptotical Stability → LAS

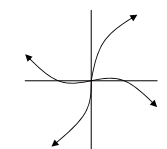
系  $\dot{x} = f(x)$  の平衡点  $x = 0$  が (局所) 漸近安定であるとは、 $x = 0$  が安定かつ吸引的であることである。



漸近安定な平衡点

中立安定な部分空間を含む安定な平衡点

Lyapunov 安定な平衡点



不安定な平衡点

デジタル制御

2013 年後期 - 19 / 76

## 安定性の厳密な定義 — 復習 (3)

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

### 大域的安定性: Global Stability → GS

系  $\dot{x} = f(x)$  の平衡点  $x = 0$  が大域的に安定であるとは、安定であり、かつ全ての初期値に対する解が有界であることである。

### 大域的漸近安定性: Global Asymptotical Stability → GAS

系  $\dot{x} = f(x)$  の平衡点  $x = 0$  が大域的漸近安定であるとは、漸近安定で、かつ吸引領域が全領域であることである。

デジタル制御

2013 年後期 - 20 / 76

## Lyapunov 関数の概念

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

$V$  の計算法

2 次形式と正定行列

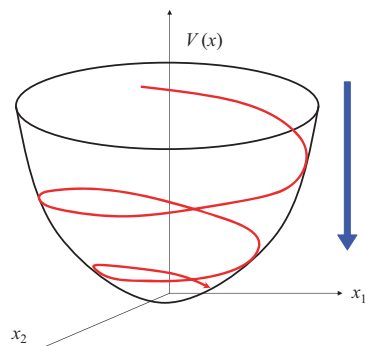
線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎



Lyapunov 関数:  $V(x)$   
→ 正定関数

正定関数とは:

- ✓  $V(0) = 0$
- ✓  $V(x) > 0, \quad x \neq 0$

⇒ お椀型の関数

たとえば、

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$$

$V(x)$  が単調減少すれば、 $x$  は原点に漸近

⇒  $\dot{V}(x) < 0 (x \neq 0)$  なら漸近安定

デジタル制御

2013 年後期 - 21 / 76

## $\dot{V}$ の計算法

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

$V$  の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

もともとは、微分方程式

$$\dot{x} = f(x)$$

の安定性を調べたかったはず。→  $f(x)$  の情報はどこで使うのだろう?

$\dot{V}(x)$  の計算に  $f(x)$  を使う。

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

$\partial V / \partial x$  は横ベクトル。

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

デジタル制御

2013 年後期 - 23 / 76

## Lyapunov の安定定理

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

$V$  の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

共通した条件:  $V(x)$  は正定関数

**LS:**

原点近傍で

- ✓  $\dot{V} \leq 0$

ならば、(局所) 安定。

**LAS:**

原点近傍で

- ✓  $\dot{V} < 0 (x \neq 0)$

ならば、(局所) 漸近安定。

**GS:**

- ✓  $\dot{V} \leq 0$

✓  $V(x)$  が放射状に非有界

ならば、大域安定。

**GAS:**

- ✓  $\dot{V} < 0 (x \neq 0)$

✓  $V(x)$  が放射状に非有界

ならば、大域的漸近安定。

放射状に非有界 (Radially unbounded) であるとは?

$$V(x) \rightarrow \infty \quad (\|x\| \rightarrow \infty)$$

## 2 次形式と正定行列

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

$V$  の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$  に関する同次な 2 次式  $W(x)$  は、

$$W(x) = x^T P x$$

のように対称行列  $P$  を用いて表現できる。

[例]  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 \quad x_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$W(x) = x^T P x$  が正定関数である必要十分条件は、 $P$  の固有値が全て正であることである。

- ✓ 正定行列: 固有値が全て正な実対称行列。  $P > 0$  と表記。
- ✓ 準正定行列: 固有値が全て正またはゼロである実対称行列。  $P \geq 0$  と表記。
- ✓ 負定行列, 準負定行列も同様に定義される。
- ✓ 正定行列  $P, Q$  に対し、 $Q - P > 0$  ならば  $Q > P > 0$  と書く。

デジタル制御

2013 年後期 - 24 / 76

## 線形系の場合 (1)

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

線形系

$$\dot{x} = Ax$$

の漸近安定性に関するリアプノフの定理は以下ようになる。

**線形系のリアプノフの定理:**  $\dot{x} = Ax$  が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正定行列  $Q$  に対してリアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q$$

の解  $P$  が正定となることである。

- ✓ これは、2 次形式のリアプノフ関数  $V(x) = x^T P x$  が存在して、その時間微分  $\dot{V} = x^T (PA + A^T P)x$  が負定関数  $-x^T Q x$  になることを意味している。
- ✓ 線形の場合、2 次のリアプノフ関数だけを考えればよく、この定理が必要十分条件で与えられていることに注意する。
- ✓ 漸近安定性を調べるために、全ての  $Q > 0$  に対し条件をチェックする必要はないことに注意する。

デジタル制御

2013 年後期 - 25 / 76

## 線形系の場合 (3)

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

次の形の必要十分条件も得られている。

**組  $(A, C)$  が可観測と仮定する。**  $\dot{x} = Ax$  が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正の数  $\alpha$  に対し、

$$PA + A^T P = -\alpha C^T C - Q$$

を満たす  $P > 0, Q \geq 0$  が存在することである。

$V(x) = x^T P x$  に対し  $\dot{V} \leq -\alpha x^T C^T C x$  となるが、右辺が準負定にしかならないので、 $y = Cx$  がゼロに漸近することしかいえない。ここで可観測性より  $y$  が恒等的にゼロならば  $x$  もゼロなので、最終的に漸近安定性が結論できる。

なお、 $Q = 0, \alpha = 1$  のときの  $P$  は可観測性グラムになる。

デジタル制御

2013 年後期 - 27 / 76

## 線形系の場合 (2)

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

十分性は明らか。

必要性を証明する。 $\dot{x} = Ax$  が漸近安定ならば、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau &= - \int_0^\infty x(\tau)^T (PA + A^T P)x(\tau) d\tau \\ &= - \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} x(\tau)^T P x(\tau) d\tau \\ &= x(0)^T P x(0) - x(\infty)^T P x(\infty) \\ &= x(0)^T P x(0) > 0 \quad (x(0) \neq 0) \end{aligned}$$

となり、 $P$  は正定行列。

デジタル制御

2013 年後期 - 26 / 76

## 離散時間の場合

オブザーバ

リアプノフ安定論

平衡点

安定性の定義

Lyapunov 関数の概念

Lyapunov の安定定理

V の計算法

2 次形式と正定行列

線形系の場合

離散時間の場合

カルマンフィルタ

最適レギュレータ

$H_\infty$  制御の基礎

$$x(k+1) = Ax(k)$$

の漸近安定性に関するリアプノフの定理は  $\dot{V}$  の代わりに  $V(x(k+1)) - V(x(k))$  を考えればよい。

**$x(k+1) = Ax(k)$  が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正定行列  $Q$  に対してリアプノフ方程式**

$$A^T P A - P = -Q$$

の解  $P$  が正定となることである。

**組  $(A, C)$  が可観測と仮定する。**  $x(k+1) = Ax(k)$  が漸近安定となる必要十分条件は、任意に 1 つ選んだ正の数  $\alpha$  に対し、

$$A^T P A - P = -\alpha C^T C - Q$$

を満たす  $P > 0, Q \geq 0$  が存在することである。

デジタル制御

2013 年後期 - 28 / 76

## カルマンフィルタ

### 離散時間カルマンフィルタ (1)

対象システム (時変系):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + D(k)w(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + v(k) \end{aligned}$$

$w(k)$ ,  $v(k)$  の各要素は白色ガウス雑音で、

$$\begin{aligned} E[v(k)] &= 0, & E[v^T(k)v(\ell)] &= \delta_{k\ell}V(k) \\ E[w(k)] &= 0, & E[w^T(k)w(\ell)] &= \delta_{k\ell}W(k) \end{aligned}$$

ただし、 $w(k)$  と  $v(k)$  は無相関。

ここでの目的は、観測できる信号 (入力  $u$  と出力  $y$ ) から、**現在の状態  $x(k)$  の期待値 (最尤推定量)** を求めること。

ノイズ  $w(k)$ ,  $v(k)$  は観測できないことに注意。

- ✓  $\{w(k)\}$  が離散時間での白色雑音 (white noise) であるとは、平均がゼロで、 $w(i)$  と  $w(j)$  ( $i \neq j$ ) が無相関

$$\bar{w} = E[w] = 0, \quad E[w(i)^T w(j)] = \delta_{i,j} \sigma^2 I$$

- ✓  $w(t)$  が連続時間の意味で白色雑音であるとは、平均がゼロで、 $w(t)$  と  $w(t')$  ( $t \neq t'$ ) が無相関

$$\bar{w} = E[w] = 0, \quad E[w(t)^T w(t')] = \delta(t-t') \sigma^2 I$$

- ✓ 雑音がガウス性を持つとは、その確率分布が正規分布 (ガウス分布) であること

$$E[w(t) < x] = \int_{-\infty}^x f(x') dx', \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

- ✓ ガウス性の白色雑音を白色ガウス雑音という。

### 離散時間カルマンフィルタ (2)

$y(0), \dots, y(k'), u(0), \dots, u(k')$  が分かっている時の、 $x(k)$  ( $k \geq k'$ ) の期待値を  $\hat{x}(k|k')$  と書く。

#### 離散時間カルマンフィルタ

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k) &= \hat{x}(k|k-1) + K(k)\{y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\} \\ \hat{x}(k|k-1) &= A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) + B(k-1)u(k-1) \end{aligned}$$

カルマンゲイン  $K(k)$  の決定:

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k|k)C^T(k)V^{-1}(k) \\ M(k|k-1) &= A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1) \\ &\quad + D(k-1)W(k-1)D^T(k-1) \\ P(k|k) &= [I - K(k)C(k)]M(k|k-1) \\ &= \{M^{-1}(k|k-1) + C^T(k)V^{-1}(k)C(k)\}^{-1} \end{aligned}$$



## 離散時間カルマンフィルタ (3)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
白色ガウス雑音  
離散時間カルマンフィルタ  
離散時間定常 KF  
WN 下の連続時間系  
連続時間 KF  
連続時間定常 KF  
最適レギュレータ  
 $H_\infty$  制御の基礎

- ✓ 初期値は、 $\hat{x}(0|0) = E\{x(0)\}$ ,  
 $P(0|0) = E\{(x(0) - E\{x(0)\})(x^T(0) - E\{x(0)\})\}$  とする。
- ✓ ガウス性が成り立たない場合は、得られる推定値は最尤推定量ではないが、最小二乗誤差を最小とする。
- ✓ カルマンゲインはオフラインで計算しておくといよい。

デジタル制御

2013 年後期 - 33 / 76

## 離散時間定常カルマンフィルタ (2)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
白色ガウス雑音  
離散時間カルマンフィルタ  
離散時間定常 KF  
WN 下の連続時間系  
連続時間 KF  
連続時間定常 KF  
最適レギュレータ  
 $H_\infty$  制御の基礎

追従誤差  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  は、 $w(k) = 0, v(k) = 0$  のとき、

$$e(k+1) = (I - KC)Ae(k)$$

$(I - KC)A$  の安定性がカルマンフィルタの安定性を支配する。

$(A, D)$  が可到達、 $(A, C)$  が可観測であれば、 $(I - KC)A$  は安定

$M$  に関する方程式 (Riccati 型):

$$AMA^T - M + DWD^T - AMC^T(CMC^T + V)^{-1}CMA^T = 0$$

[参考] 逆行列の補助定理:  $A, A + BC, I + CA^{-1}B$  が正則ならば、

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

デジタル制御

2013 年後期 - 35 / 76

## 離散時間定常カルマンフィルタ (1)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
白色ガウス雑音  
離散時間カルマンフィルタ  
離散時間定常 KF  
WN 下の連続時間系  
連続時間 KF  
連続時間定常 KF  
最適レギュレータ  
 $H_\infty$  制御の基礎

時不変系 ( $A, B, C, D, V, W$  がすべて定数) に対し、 $(A, C)$  が可観測の場合、 $P(k|k)$  はある値  $P$  に収束する。

→ 定常カルマンフィルタ

また、 $(A, D)$  が可到達の場合は、 $P$  は正定値行列である。

離散時間定常カルマンフィルタ:

$$\hat{x}(k) = (I - KC)A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1) + Ky(k)$$

ただし、 $K = PC^TV^{-1}$

定常ゲインの導出:

$$APA^T - P + DWD^T - PC^T(V - CPC^T)^{-1}CP = 0$$

$$\text{あるいは、}(APA^T + DWD^T)^{-1} + C^TV^{-1}C = P^{-1}$$

これの正定解  $P > 0$  を採用

デジタル制御

2013 年後期 - 34 / 76

## 白色雑音下の連続時間系 (1)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
白色ガウス雑音  
離散時間カルマンフィルタ  
離散時間定常 KF  
WN 下の連続時間系  
連続時間 KF  
連続時間定常 KF  
最適レギュレータ  
 $H_\infty$  制御の基礎

ホワイトノイズが入る連続時間系:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + Dw$$

$$y = C(t)x + v$$

$w(t), v(t)$  の各要素は白色ガウス雑音で、

$$E[v(t)] = 0, \quad E[v^T(t)v(t')] = \delta(t-t')V$$

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w^T(t)w(t')] = \delta(t-t')W$$

ただし、 $w(t)$  と  $v(t)$  は無相関。

$x$  は時間に関して微分不可能なので、これは正しい表現ではない。しかし、このほうが理解しやすいだろう

デジタル制御

2013 年後期 - 36 / 76

## 白色雑音下の連続時間系 (2)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 白色ガウス雑音
- 離散時間カルマンフィルタ
- 離散時間定常 KF
- WN 下の連続時間系
- 連続時間 KF
- 連続時間定常 KF
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

正しい表記 (伊藤の微分方程式):

$$\begin{aligned} dx &= A(t)x dt + B(t)u dt + DW^{1/2}d\theta \\ y &= C(t)x + v \end{aligned}$$

- ✓  $\theta$  の各要素は独立な標準ウィーナー過程。大ざっぱに言えば、

$$\int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau = W^{1/2}\theta$$

- でブラウン運動・ランダムウォークとも呼ばれる。
- ✓ 伊藤の微分方程式の両辺にインテグラルを付けて考えても良い。この場合の積分は、リーマン・スティルテス積分の意味になる。

## 連続時間定常カルマンフィルタ (1)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 白色ガウス雑音
- 離散時間カルマンフィルタ
- 離散時間定常 KF
- WN 下の連続時間系
- 連続時間 KF
- 連続時間定常 KF
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

時不変系:

$$dx = Ax dt + B u dt + D d\theta, \quad y = Cx + v$$

において、十分大きな  $t$  に対して  $P$  が収束したとする。

定常カルマンフィルタ:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(C\hat{x} - y), \quad K = -PC^T V^{-1}$$

リカッチ代数方程式:

$$AP + PA^T + DWD^T - PC^T V^{-1} CP = 0, \quad P \text{ は正定行列}$$

- ✓ リカッチ代数方程式は有本・ポッター法によって解くことができる。後の最適レギュレータのときに有本・ポッター法について説明する。
- ✓ 定常カルマンフィルタは全状態オブザーバと全く同じ形をしている。オブザーバゲインの決定がリカッチ方程式による点だけが異なる。

## 連続時間カルマンフィルタ

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 白色ガウス雑音
- 離散時間カルマンフィルタ
- 離散時間定常 KF
- WN 下の連続時間系
- 連続時間 KF
- 連続時間定常 KF
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

連続時間系をサンプリング周期  $T$  でサンプリングし、サンプル値系に対する離散時間カルマンフィルタの極限 ( $T \rightarrow +0$ ) を考える。

連続時間カルマンフィルタ:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(t)\hat{x} + B(t)u + K(t)[C(t)\hat{x} - y] \\ K(t) &= -P(t)C^T(t)V^{-1} \end{aligned}$$

共分散行列の推定値  $P(t)$  に関する微分方程式 (リカッチ微分方程式):

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + D(t)W(t)D^T(t) \\ &\quad - P(t)C^T(t)V^{-1}C(t)P(t) \end{aligned}$$

初期値:  $\hat{x}(0) = E[x(0)], P(0) = E[(x(0) - E[x(0)])(x(0) - E[x(0)])^T]$

ガウス分布の過程の下で、 $\hat{x}$  は  $x$  の最尤推定量を与える。

## 連続時間定常カルマンフィルタ (2)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 白色ガウス雑音
- 離散時間カルマンフィルタ
- 離散時間定常 KF
- WN 下の連続時間系
- 連続時間 KF
- 連続時間定常 KF
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎

定理:  $(A, D)$  が可制御,  $(A, C)$  が可観測,  $W, V$  が正定と仮定する。そのとき、以下の3つが成り立つ。

1. 代数リカッチ方程式の正定解が唯一存在する。
2.  $A + KC$  が漸近安定となる代数リカッチ方程式の解  $P$  が唯一存在し、1. の正定解と一致する。
3. リカッチ微分方程式の解  $P(t)$  は、 $t \rightarrow \infty$  のとき代数リカッチ方程式の正定解  $P$  に漸近する。

$$\begin{aligned} (A + KC)^T P^{-1} + P^{-1}(A + KC) &= A^T P^{-1} + P^{-1}A - 2C^T V^{-1} C \\ &= -P^{-1}DWD^T P^{-1} - C^T V^{-1} C \end{aligned}$$

$y = V^{-1/2}Cx$  からみて可観測。

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ**
- 最適制御問題
- 最適性の原理
- HJB 方程式の導出
- HJ 方程式
- HJ 方程式の解
- LQ 問題
- Riccati 方程式の解法
- $H_\infty$  制御の基礎

## 最適レギュレータ

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ**
- 最適制御問題
- 最適性の原理
- HJB 方程式の導出
- HJ 方程式
- HJ 方程式の解
- LQ 問題
- Riccati 方程式の解法
- $H_\infty$  制御の基礎

## 最適制御問題

典型的な問題設定 (終端時間  $T$  固定, 終端条件なし):

- ✓ 制御対象:  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$
- ✓ 評価規範 (Bolza 型):

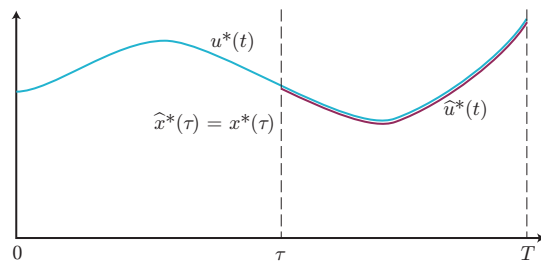
$$\begin{aligned}
 J(x(0); u(\cdot)) &= E(x(T)) + \int_0^T L(x, u) dt \\
 &= E(x(T)) + \int_0^T L_0(x) + \frac{1}{2} u^T R(x) u dt \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

- ここで,  $R(x)$  は正定とする。
- ✓ 初期値:  $x(0) = x_0$
- ✓ 今回は、入力制約は考えない。

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- 最適制御問題
- 最適性の原理**
- HJB 方程式の導出
- HJ 方程式
- HJ 方程式の解
- LQ 問題
- Riccati 方程式の解法
- $H_\infty$  制御の基礎

制御区間を  $[0, T]$  としたときの最適制御の解を  $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$  とする。  
 制御区間を  $[\tau, T]$ , 初期値を  $x^*(\tau)$  としたときの最適制御の解を  $\{\hat{x}^*(\cdot), \hat{u}^*(\cdot)\}$  とすると、

$$\hat{x}^*(t) = x^*(t), \quad \hat{u}^*(t) = u^*(t), \quad t \in [\tau, T]$$



最適制御  $u^*(t)$  の値は、そのときの状態と残り時間  $T-t$  で記述可能  
 このとき初期値  $x(0)$  は不要

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- 最適制御問題
- 最適性の原理
- HJB 方程式の導出**
- HJ 方程式
- HJ 方程式の解
- LQ 問題
- Riccati 方程式の解法
- $H_\infty$  制御の基礎

値関数:  $V(x, t)$

$$V(x, t) \triangleq \inf_{u(\cdot)} \left[ E(x(T)) + \int_t^T L(x, u) dt \right]$$

つまり、その時刻以降に加算される最小のコストを、現在の  $x$  と  $t$  の関数で表現したもの。

Bellman の最適性の原理より、微小な  $dt$  に関して

$$V(x(t), t) = \inf_{u(\cdot)} \left[ \int_t^{t+dt} L(x(\tau), u(\tau)) d\tau + V(x(t+dt), t+dt) \right]$$

## Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程式の導出 (2)

[オブザーバ](#)  
[リアプノフ安定論](#)  
[カルマンフィルタ](#)  
[最適レギュレータ](#)  
[最適制御問題](#)  
[最適性の原理](#)  
[HJB 方程式の導出](#)  
[HJ 方程式](#)  
[HJ 方程式の解](#)  
[LQ 問題](#)  
[Riccati 方程式の解法](#)  
 [\$H\_\infty\$  制御の基礎](#)

$V(\cdot)$  の微分可能性を仮定し、 $dt$  に関するオーダー評価:

$$\begin{aligned}
 V(x(d+dt), t+dt) \\
 = V(x(t), t) + \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(f(x(t)) + g(x(t))u) + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + O(dt^2)
 \end{aligned}$$

これを代入し  $dt \rightarrow 0$  の極限をとる。

**Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程式 (HJB 方程式):**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial t} + \inf_u \left[ L(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \right] &= 0 \\
 V(x, T) &= E(x)
 \end{aligned}$$

## Hamilton-Jacobi 方程式の解について (1)

[オブザーバ](#)  
[リアプノフ安定論](#)  
[カルマンフィルタ](#)  
[最適レギュレータ](#)  
[最適制御問題](#)  
[最適性の原理](#)  
[HJB 方程式の導出](#)  
[HJ 方程式](#)  
[HJ 方程式の解](#)  
[LQ 問題](#)  
[Riccati 方程式の解法](#)  
 [\$H\_\infty\$  制御の基礎](#)

HJ 方程式の解は複数存在する。

$f(0) = 0$ ,  $R > 0$ ,  $L_0(x)$  は正定, システムは漸近安定化可能と仮定。

以下の 3 つは同値である。

- (a)  $V(x)$  は微分可能な値関数。
- (b)  $V(x)$  は Hamilton-Jacobi 方程式の正定解。
- (c) Hamilton-Jacobi 方程式の解  $V(x)$  のもとで  $u = u^*(x)$  は原点を漸近安定化する。

## 無制限制御区間の場合 — Hamilton-Jacobi 方程式

[オブザーバ](#)  
[リアプノフ安定論](#)  
[カルマンフィルタ](#)  
[最適レギュレータ](#)  
[最適制御問題](#)  
[最適性の原理](#)  
[HJB 方程式の導出](#)  
[HJ 方程式](#)  
[HJ 方程式の解](#)  
[LQ 問題](#)  
[Riccati 方程式の解法](#)  
 [\$H\_\infty\$  制御の基礎](#)

- ✓  $f(0) = 0$ , かつ  $L_0(x)$  が正定と仮定。
- ✓ 無限制御区間問題 ( $T = +\infty$ ,  $E(\cdot) = 0$ ) である。この場合は、値関数は  $x$  だけの関数。

**Hamilton-Jacobi 偏微分方程式 (HJ 方程式):**

$$\begin{aligned}
 \inf_u \left[ L(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \right] &= \\
 \frac{\partial V}{\partial x}f(x) + L_0(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}g(x)R(x)^{-1}g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\
 V(0) &= 0
 \end{aligned}$$

最適入力  $u = u^*(x)$  は  $L(x, u) + (\partial V / \partial x)(f(x) + g(x)u)$  を最小化する

$$u = u^*(x) = -R(x)^{-1}g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}$$

## Hamilton-Jacobi 方程式の解について (2)

[オブザーバ](#)  
[リアプノフ安定論](#)  
[カルマンフィルタ](#)  
[最適レギュレータ](#)  
[最適制御問題](#)  
[最適性の原理](#)  
[HJB 方程式の導出](#)  
[HJ 方程式](#)  
[HJ 方程式の解](#)  
[LQ 問題](#)  
[Riccati 方程式の解法](#)  
 [\$H\_\infty\$  制御の基礎](#)

**証明:**

(a)→(b): 値関数および各種仮定より明らか。

(b)→(c):  $V(x)$  をリアプノフ関数とし、

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}f'(x) - \frac{\partial V}{\partial x}g(x)R(x)^{-1}g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x} = -L(x, u^*) \leq -L_0(x)$$

となり漸近安定。

(c)→(a): 恒等式

$$\begin{aligned}
 J(x(0); u(\cdot)) \\
 = V(x(0)) - V(x(+\infty)) + \frac{1}{2} \int_0^\infty (u - u^*(x))^T R(x)(u - u^*(x)) dt
 \end{aligned}$$

より、“ $u = u^*(x)$  が原点を漸近安定化する  $V(x)$ ” は値関数の定義を満たす。

## LQ 最適制御問題 (1)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
最適制御問題  
最適性の原理  
HJB 方程式の導出  
HJ 方程式  
HJ 方程式の解  
LQ 問題  
Riccati 方程式の解法  
 $H_\infty$  制御の基礎

線形系の場合について考える。

制御対象: 線形系 (可制御性を仮定)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

評価規範: 2 次形式 ( $R > 0, Q > 0$ )

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt$$

⇒ Linear-Quadratic 最適制御問題 (LQ 最適制御問題)

デジタル制御

2013 年後期 - 49 / 76

## LQ 最適制御問題 (3)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
最適制御問題  
最適性の原理  
HJB 方程式の導出  
HJ 方程式  
HJ 方程式の解  
LQ 問題  
Riccati 方程式の解法  
 $H_\infty$  制御の基礎

LQ 問題の解

**Riccati 方程式:**

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

の正定解  $P$  (唯一に存在)

**最適制御則:**

$$u = -R^{-1}B^T P x$$

最適制御則は漸近安定化制御則

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T (PA + AP - 2PBR^{-1}B^T P)x \\ &= -x^T (Q + PBR^{-1}B^T P)x < 0 \quad (x \neq 0)\end{aligned}$$

デジタル制御

2013 年後期 - 51 / 76

## LQ 最適制御問題 (2)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
最適制御問題  
最適性の原理  
HJB 方程式の導出  
HJ 方程式  
HJ 方程式の解  
LQ 問題  
Riccati 方程式の解法  
 $H_\infty$  制御の基礎

値関数を

$$V(x) = x^T P x + S(x), \quad S(x) = O(x^3)$$

とし、HJ 方程式に代入

**HJ 方程式の 2 次項:**

$$x^T (PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P)x = 0$$

**HJ 方程式の 3 次以上の項:**

$$\begin{aligned}S_x(x)Ax + x^T A^T S_x(x)^T - S_x(x)BR^{-1}B^T P x \\ - x^T PBR^{-1}B^T S_x(x)^T - S_x(x)BR^{-1}B^T S_x(x)^T = 0\end{aligned}$$

⇒  $S(x) = 0$

デジタル制御

2013 年後期 - 50 / 76

## Riccati 方程式の解法 (1)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
最適制御問題  
最適性の原理  
HJB 方程式の導出  
HJ 方程式  
HJ 方程式の解  
LQ 問題  
Riccati 方程式の解法  
 $H_\infty$  制御の基礎

Riccati 方程式の解法 (有本-Potter 法) について述べる。

**随伴変数の定義:**  $p = P x$

最適制御則の下での制御対象:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T P x = Ax - BR^{-1}B^T p$$

随伴方程式:

$$\dot{p} = (PA - PBR^{-1}B^T P)x = -(A^T P + Q)x = -Qx - A^T p$$

以上まとめると正準方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = A_H \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

$A_H$  をハミルトニアン行列という。

デジタル制御

2013 年後期 - 52 / 76

## Riccati 方程式の解法 (2)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- 最適制御問題
- 最適性の原理
- HJB 方程式の導出
- HJ 方程式
- HJ 方程式の解
- LQ 問題
- Riccati 方程式の解法
- $H_\infty$  制御の基礎

**ハミルトニアン行列の性質:**  $A_H$  が固有値  $\lambda$  を持つならば、 $-\lambda$  も  $A_H$  の固有値である。

証明  $A_H$  が

$$(\lambda I - A_H) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0$$

なる固有値  $\lambda$  と右固有ベクトル  $(f^T, g^T)^T$  を持つとする。そのとき、 $(-g^T, f^T)(-\lambda I - A_H) = 0$  が成り立つことが簡単な計算でわかる。つまり、 $A_H$  は固有値  $-\lambda$  と左固有ベクトル  $(-g^T, f^T)$  を持つ。□

漸近安定化された閉ループ系を正準方程式系の一部として含むことにより、 $A_H$  には少なくとも  $n$  個安定な固有値を含む。つまり LQ 最適制御問題の正準方程式系は、 **$n$  個の安定な固有値と  $n$  個の不安定な固有値を持つ。**

この場合のハミルトニアン行列  $A_H$  は虚軸上に固有値を持たない。この性質を正準方程式系が双曲的であるという。

## Riccati 方程式の解法 (3)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- 最適制御問題
- 最適性の原理
- HJB 方程式の導出
- HJ 方程式
- HJ 方程式の解
- LQ 問題
- Riccati 方程式の解法
- $H_\infty$  制御の基礎

漸近安定化された閉ループ系は、「 $A_H$  の安定な固有値に対応する  $n$  次元の固有ベクトル空間」に正準方程式系を制約したダイナミクス。つまり、上記固有ベクトル空間上の点が  $p = Px$  なる関係を満たす。

$A_H$  の安定な固有値に対する固有ベクトル空間:

$$A_H \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

$\Lambda$ :  $n$  個の安定な固有値と同じ固有値を持つ行列すると、その固有ベクトル空間上に  $(x^T, p^T)^T$  がある。

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Px \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} k$$

$x = S_1 k, Px = S_2 k$  から係数  $k$  を消去すると、 $Px = S_2 S_1^{-1} x$

Riccati 方程式の解は、 $P = S_2 S_1^{-1}$

## $RH_\infty$

以下の用語の定義を用いる。

- ✓ 伝達関数行列  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  を以下のように表記する。

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

- ✓ 有理行列  $G(s)$  がプロパーとは、 $s \rightarrow \infty$  のときの  $G(s)$  の最大特異値が有界:  $\sigma_{\max}[G(\infty)] < \infty$

$$G(s) \text{ がプロパー} \iff G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \text{ と表される}$$

- ✓  $G(s)$  が  $RH_\infty$  であるとは、プロパーで安定な実有理行列であること。

$$G(s) \in RH_\infty \iff G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \operatorname{Re} \lambda[A] < 0$$

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍型点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

## $H_\infty$ 制御の基礎

## $H_\infty$ ノルム

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ

**$H_\infty$  制御の基礎**

$RH_\infty$

$H_\infty$  ノルム

$L_2$  ノルムとの関係

Riccati 方程式との関連

$H_2$  ノルムの計算

$H_\infty$  制御 (状態 FB)

二人ゼロ和微分ゲーム

Hamiltonian の鞍型点

Riccati 方程式

$L_2$  ノルム比の確認

安定化解

ロバスト制御

- ✓  $\text{Re } s > 0$  の領域で解析的かつ有界な関数  $f(s)$  の  $H_\infty$  ノルムは、

$$\|f(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re } s > 0} \sigma_{\max}[f(s)]$$

- ✓  $G(s) \in RH_\infty$  の  $H_\infty$  ノルムは、

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

- ✓  $G(s)$  がスカラーの場合、 $H_\infty$  ノルムは「安定な伝達関数のゲインの最大値」
- ✓  $G(s) \in RH_\infty$  (ただし  $G(\infty) = D = 0$ ) の  $H_2$  ノルムは、

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega}$$

デジタル制御

2013 年後期 - 57 / 76

## $L_2$ ノルムとの関係 (2)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ

**$H_\infty$  制御の基礎**

$RH_\infty$

$H_\infty$  ノルム

$L_2$  ノルムとの関係

Riccati 方程式との関連

$H_2$  ノルムの計算

$H_\infty$  制御 (状態 FB)

二人ゼロ和微分ゲーム

Hamiltonian の鞍型点

Riccati 方程式

$L_2$  ノルム比の確認

安定化解

ロバスト制御

実際にはより強く

初期値ゼロとすると、

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$$

ただし、時間信号の  $\|\cdot\|_2$  は  $L_2$  ノルムである。

また同様に、

1 出力系を考える。初期値ゼロとすると、

$$\|G(s)\|_2 = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_2}$$

ここで、時間信号の  $\|\cdot\|_\infty$  は  $L_\infty$  ノルムである。

デジタル制御

2013 年後期 - 59 / 76

## $L_2$ ノルムとの関係 (1)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ

**$H_\infty$  制御の基礎**

$RH_\infty$

$H_\infty$  ノルム

$L_2$  ノルムとの関係

Riccati 方程式との関連

$H_2$  ノルムの計算

$H_\infty$  制御 (状態 FB)

二人ゼロ和微分ゲーム

Hamiltonian の鞍型点

Riccati 方程式

$L_2$  ノルム比の確認

安定化解

ロバスト制御

$G(s) \in RH_\infty$  とする。  $\|G(s)\| \leq \gamma$  は、  $\gamma^2 I - G(-j\omega)^T G(j\omega) \geq 0$  と書ける。

$Z(s) = G(s)W(s)$ ,  $z(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z(s)]$ ,  $w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)]$  として、パーセバルの公式より、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(-j\omega)^T Z(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(-j\omega)^T G(-j\omega)^T G(j\omega) W(j\omega) d\omega \\ &\leq \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(-j\omega)^T W(j\omega) d\omega = \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \end{aligned}$$

デジタル制御

2013 年後期 - 58 / 76

## Riccati 方程式との関連 (1)

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ

**$H_\infty$  制御の基礎**

$RH_\infty$

$H_\infty$  ノルム

$L_2$  ノルムとの関係

Riccati 方程式との関連

$H_2$  ノルムの計算

$H_\infty$  制御 (状態 FB)

二人ゼロ和微分ゲーム

Hamiltonian の鞍型点

Riccati 方程式

$L_2$  ノルム比の確認

安定化解

ロバスト制御

$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in RH_\infty$  を考える。ただし、 $(A, B, C, D)$  は最小実現と仮定する。

$\|G(s)\| \leq \gamma \iff \|z(t)\|_2^2 - \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \leq 0$  なので、この不等式の左辺を最大化する「最悪外乱  $w(t) = w^*(t)$ 」を考えよう。

$$\int_0^\infty x^T C^T C x - \gamma^2 w^T w dt \rightarrow \max$$

$D = 0$  とし、最適制御問題と同様に Riccati 方程式を作ると、

$$A^T X + X A + \gamma^{-2} X B B^T X + C^T C = 0, \quad X > 0$$

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2} B^T X x$$

$X$  の二乗項の符号がプラスであることに注意。

デジタル制御

2013 年後期 - 60 / 76

## Riccati 方程式との関連 (2)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連**
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

逆にこのとき、

$$\begin{aligned} x(T)^T X x(T) - x(0)^T X x(0) &= \\ \int_0^T (Ax + Bw)^T X x + x^T X (Ax + Bw) dt & \\ = \int_0^T w^T B^T X x + x^T X B w - x^T C^T C x - \gamma^{-2} x^T X B B^T X x dt & \\ = \int_0^T -\gamma^2 (w - w^*)^T (w - w^*) - x^T C^T C x + \gamma^2 w^T w dt & \\ \leq \int_0^T -\|z\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 dt & \end{aligned}$$

つまり、 $x(0) = 0$  のとき  $L_2$  ゲイン条件を満たす。  
 ただし、解の一意性、 $w = w^*$  の下での内部安定性はよくわからない。  
 $\Rightarrow w = w^*$  の下で内部安定となる  $X$  を安定化解という。  
 この場合、安定化解は正定解。

## Riccati 方程式との関連 (4)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連**
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{bmatrix} < 0 \iff A + BC^{-1}B^T < 0, C > 0$$

$A + BC^{-1}B^T$  を Shur Complement という。

すると、Riccati 不等式

$$A^T X + XA + (XB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T X + D^T C^T) + C^T C < 0$$

は、 $X$  と  $\gamma^2$  に関する線形行列不等式 (LMI)

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ (XB + C^T D)^T & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix} < 0, X = X^T > 0$$

に変形可能。 $\gamma^2$  の最小化を行う最適化を内点法で計算可能。  
 (極小値と最小値の違いの煩雑さは残るが...)

## Riccati 方程式との関連 (3)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連**
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

Riccati 方程式は不等式でもかまわないことがわかる。

以下の 2 つは同値

- (1)  $\gamma > \|C(sI - A)^{-1}B + D\|_\infty$
- (2)  $\gamma^2 I - D^T D > 0$  か?

$$A^T X + XA + (XB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T X + D^T C^T) + C^T C < 0$$

を満たす正定解  $X > 0$  が存在する。

## $H_2$ ノルムの計算

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連**
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

可観測性グラミアン:

$$L_O = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt > 0$$

はリアプノフ方程式

$$A^T L_O + L_O A + C^T C = 0$$

から得られる。  
 ノルムの定義式にパーセバルの定理を適用して  $G(s)$  のインパルス応答を代入すると、

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \text{tr}[B^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} B] dt} = \sqrt{\text{tr}[B^T L_O B]}$$



## $H_\infty$ 制御問題 (状態フィードバック) (1)

オブザーバ  
 リアプノフ安定論  
 カルマンフィルタ  
 最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
 Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 **$H_\infty$  制御 (状態 FB)**  
 二人ゼロ和微分ゲーム  
 Hamiltonian の鞍型点  
 Riccati 方程式  
 $L_2$  ノルム比の確認  
 安定化解  
 ロバスト制御

制御対象:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= Cx + D_1 w + D_2 u\end{aligned}$$

✓  $x \in \mathbb{R}^n$ : 状態ベクトル,  $w \in \mathbb{R}^m$ : 外乱などの外生信号  
 $u \in \mathbb{R}^\ell$ : 制御入力,  $z \in \mathbb{R}^p$ : 評価出力

**問題設定:** 外乱  $w$  から出力  $z$  までの  $H_\infty$  ノルム (=  $L_2$  ノルム比) が、あらかじめ決定された値  $\gamma (> 0)$  以下であるような制御入力  $u$  を設計する。

仮定: 問題を簡単にするため、

$$\begin{aligned}D_1 &= 0, \quad C^T D_2 = 0 \text{ (直交条件)}, \quad \text{rank } D_2 = \ell \\ (A, B_2) &: \text{可制御 (可安定)}, \quad (A, C): \text{可観測 (可検出)}\end{aligned}$$

## 二人ゼロ和微分ゲーム (1)

オブザーバ  
 リアプノフ安定論  
 カルマンフィルタ  
 最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
 Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 **$H_\infty$  制御 (状態 FB)**  
**二人ゼロ和微分ゲーム**  
 Hamiltonian の鞍型点  
 Riccati 方程式  
 $L_2$  ノルム比の確認  
 安定化解  
 ロバスト制御

**$H_\infty$  制御における二人零和微分ゲーム:** 一方のプレーヤーは入力  $u$  により評価関数を最小化することを目的とし、もう一方のプレーヤーは外乱  $w$  を制御することにより同じ評価関数を最大化することを目的とする。

それぞれのプレーヤーにとって最適な戦略 (= 最悪外乱・制御則)

$$w = K_1^* x, \quad u = K_2^* x$$

が存在し

$$J(x_0, w, K_2^* x) \leq J(x_0, K_1^* x, K_2^* x) \leq J(x_0, K_1^* x, K_2^* x), \\ \forall w, \forall u \in \mathcal{U}(x_0, K_1^* x)$$

とすることが可能であるならば、その  $K_1^*, K_2^*$  を見つけよ。

$\mathcal{U}(x_0, K_1^* x)$  は、 $w = K_1^* x$  のもとで、 $x \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$  となる  $u(\cdot)$  の集合。

## $H_\infty$ 制御問題 (状態フィードバック) (2)

オブザーバ  
 リアプノフ安定論  
 カルマンフィルタ  
 最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
 Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 **$H_\infty$  制御 (状態 FB)**  
 二人ゼロ和微分ゲーム  
 Hamiltonian の鞍型点  
 Riccati 方程式  
 $L_2$  ノルム比の確認  
 安定化解  
 ロバスト制御

$L_2$  ノルム比が  $\gamma$  以下なので、以下の問題を考えることと同じ。

評価関数:

$$J(x_0, w, u) = \int_0^\infty \|z(\tau)\|^2 - \gamma^2 \|w(\tau)\|^2 d\tau$$

を考え、 $x_0 = 0$  のとき、全ての  $w(\cdot) \in L_2$  に対して、 $J$  が非正となるような、フィードバック  $u = K_2 x$  を求める問題。

仮定より、

$$J(x_0, w, u) = \int_0^\infty x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w dt$$

## 二人ゼロ和微分ゲーム (2)

オブザーバ  
 リアプノフ安定論  
 カルマンフィルタ  
 最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
 Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 **$H_\infty$  制御 (状態 FB)**  
**二人ゼロ和微分ゲーム**  
 Hamiltonian の鞍型点  
 Riccati 方程式  
 $L_2$  ノルム比の確認  
 安定化解  
 ロバスト制御

最適レギュレータと同様に Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を作る。

**Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式**

$$\inf_u \sup_w \left[ x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w + \frac{\partial V}{\partial x} (Ax + B_1 w + B_2 u) \right] = 0$$

最適レギュレータと同様に線形システムと 2 次形式評価規範の下では、値関数も 2 次形式で  $V(x) = x^T P x$ 。

$$\begin{aligned}\inf_u \sup_w \left[ x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w \right. \\ \left. + x^T P (Ax + B_1 w + B_2 u) + (Ax + B_1 w + B_2 u)^T P x \right] = 0\end{aligned}$$

$p = P x$  とおいた大かっこの中を Hamiltonian という。

## Hamiltonian の鞍型点

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 $H_\infty$  制御 (状態 FB)  
二人ゼロ和微分ゲーム  
**Hamiltonian の鞍型点**  
Riccati 方程式  
 $L_2$  ノルム比の確認  
安定化解  
ロバスト制御

Hamiltonian の鞍型点を平方完成することで求める。

$$\begin{aligned} & x^T C^T C x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w \\ & + x^T P (A x + B_1 w + B_2 u) + (A x + B_1 w + B_2 u)^T P x \\ = & x^T C^T C x + (u + R^{-1} B_2^T P x)^T R (u + R^{-1} B_2^T P x) \\ & - x^T P x B_2 R^{-1} B_2^T P x + \\ & - \gamma^2 (w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x)^T (w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x) \\ & + \frac{1}{\gamma^2} x^T P B_1 B_1^T P x + x^T (P A + A^T P) x \end{aligned}$$

ただし、 $R = D_2^T D_2 (> 0)$ 。よって鞍型点は

$$\begin{aligned} w &= K_1^* x = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x \\ u &= K_2^* x = -R^{-1} B_1 P x \end{aligned}$$

デジタル制御

2013 年後期 - 69 / 76

## $L_2$ ノルム比の確認

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 $H_\infty$  制御 (状態 FB)  
二人ゼロ和微分ゲーム  
Hamiltonian の鞍型点  
Riccati 方程式  
 **$L_2$  ノルム比の確認**  
安定化解  
ロバスト制御

Riccati 方程式の正定解  $P > 0$  を用いた  $u = K_2^* x = -R^{-1} B_1 P x$  は、

- ✓  $w \rightarrow z$  の  $L_2$  ノルム比を  $\gamma$  以下にする。
- ✓  $w = 0$  のときフィードバック系は安定

1 つめは、

$$x(T)^T P x(T) - x(0)^T P x(0) + \int_0^T (\|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2) dt \leq 0, \quad \forall w$$

より、 $x(0) = 0$  を代入すると証明できる。安定性は、 $V(x) = x^T P x$  をリアプノフ関数とすると、

$$\dot{V} \leq -\|z\|^2$$

なので可観測性より証明できる。

デジタル制御

2013 年後期 - 71 / 76

## Riccati 方程式

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 $H_\infty$  制御 (状態 FB)  
二人ゼロ和微分ゲーム  
Hamiltonian の鞍型点  
**Riccati 方程式**  
 $L_2$  ノルム比の確認  
安定化解  
ロバスト制御

鞍型点を HJB 方程式に代入すると

**Riccati 方程式:**

$$P A + A^T P + C^T C + P \left( \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 R^{-1} B_2^T \right) P = 0$$

このケースでは、正定解と安定化解が微妙に異なることがある。しかも、それらが存在するとは限らない。

デジタル制御

2013 年後期 - 70 / 76

## 安定化解

オブザーバ  
リアプノフ安定論  
カルマンフィルタ  
最適レギュレータ  
 **$H_\infty$  制御の基礎**  
 $RH_\infty$   
 $H_\infty$  ノルム  
 $L_2$  ノルムとの関係  
Riccati 方程式との関連  
 $H_2$  ノルムの計算  
 $H_\infty$  制御 (状態 FB)  
二人ゼロ和微分ゲーム  
Hamiltonian の鞍型点  
Riccati 方程式  
 **$L_2$  ノルム比の確認**  
安定化解  
ロバスト制御

$w = K_1^* x = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x$ ,  $u = K_2^* x = -R^{-1} B_1 P x$  のもとでシステムが漸近安定となる Riccati 方程式の解  $P$  を安定化解という。安定化解を用いた  $x^T P x$  は値関数。

つまり、実際に欲しいのは正定な安定化解。

デジタル制御

2013 年後期 - 72 / 76

## ロバスト制御 (1)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍型点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

**ロバスト性:** 外乱・モデル化誤差の影響を受けないこと。

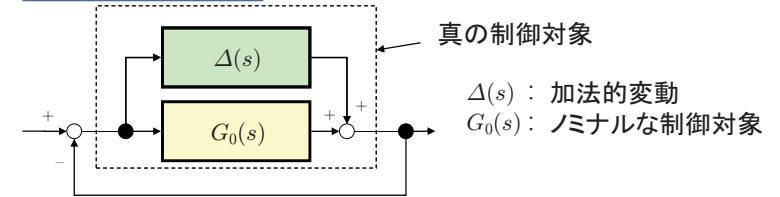
線形の  $H_\infty$  制御: 外乱から評価出力までの伝達関数のノルム ( $=H_\infty$  ノルム) をある値以下に押さえる制御

線形系では、 $H_\infty$  ノルムと  $L_2$  ゲインは等しいので、非線形系でも  $L_2$  ゲインを使って、同じ事ができる。

## ロバスト制御 (2)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍型点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

### 線形のロバスト安定性



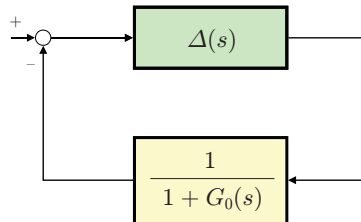
- 条件:
- ✓  $\Delta(s)$  そのものは安定
  - ✓  $|\Delta(j\omega)| < h(\omega)$  なる正の関数  $h(\omega)$  が既知

そのような全ての  $\Delta(s)$  に関して閉ループ系が安定となる必要十分条件

- ✓  $\Delta(s) = 0$  のときの閉ループ系が安定、かつ
- ✓  $|1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$

## ロバスト制御 (3)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍型点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御



一巡伝達関数の位相情報は不明 → ゲイン条件だけ

$$\left| \Delta(j\omega) \frac{1}{1 + G_0(j\omega)} \right| < 1 \Rightarrow |\Delta(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)|$$

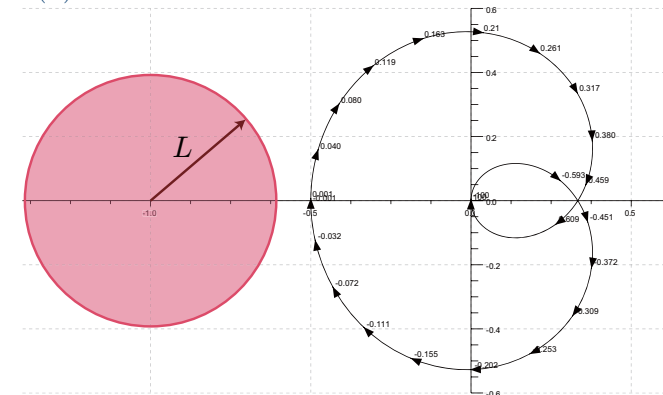
$$\Rightarrow |1 + G_0(j\omega)| > h(\omega)$$

キーポイントは、ループ内ゲインを 1 以内に押さえるということ。⇒ 未知部分に入る入力の「大きさ」を小さくする。

## ロバスト制御 (4)

- オブザーバ
- リアプノフ安定論
- カルマンフィルタ
- 最適レギュレータ
- $H_\infty$  制御の基礎**
- $RH_\infty$
- $H_\infty$  ノルム
- $L_2$  ノルムとの関係
- Riccati 方程式との関連
- $H_2$  ノルムの計算
- $H_\infty$  制御 (状態 FB)
- 二人ゼロ和微分ゲーム
- Hamiltonian の鞍型点
- Riccati 方程式
- $L_2$  ノルム比の確認
- 安定化解
- ロバスト制御

### $h(\omega)$ が定数 $L$ のとき



ナイキスト線図が円内に入らないことが 2 番目の条件