# 「ディジタル制御」(前半)

山下　裕

北海道大学 大学院情報科学研究院

2020 年後期・3 年生対象

## はじめに



## はじめに

学科共通科目「線形システム論」の続きである。
引き続き線形システムを主な対象とする。

大きく分けて

- 離散時間系・サンプル値系
- 連続時間/離散時間線形系のアドバンスト制御の初歩

に分かれる。



## 講義資料について

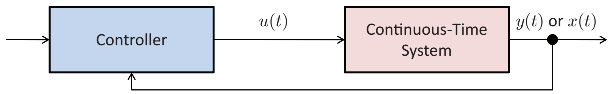
講義資料は、moodle
`https://moodle.elms.hokudai.ac.jp/course/view.php?id=76737`
におく予定。

随時訂正があるので、最新版を参照すること。

# 連続時間系と離散時間系

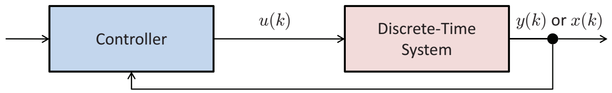
連続時間系 (Continuous-Time System)

$t \in \mathbb{R}$, 微分方程式などで表現される



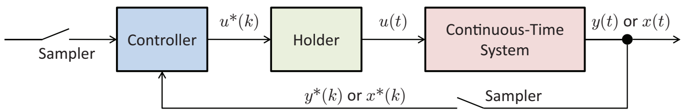

離散時間系 (Discrete-Time System)

$k \in \mathbb{Z}$ つまり、$k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
差分方程式 (≒ 漸化式) などで表現される




サンプル値系 (Sampled-Data System)

連続時間制御対象への入力をサンプル・ホールドし、離散時間システムとして扱う






# 2 つのディジタル化

離散化 (時間に関するディジタル化)

入出力を時間的に連続に行わずに、一定周期で入出力をする。一周期の間の入力は一定の値を保つ。(階段関数)

→ AD/DA 変換器の sampling rate に関係する

量子化 (物理量の表現に関するディジタル化)

入出力は連続量ではなく、決まった大きさの bit 数で表された離散量。

→ AD/DA 変換器の bit 数に関係する

本授業では量子化については取り扱わない。

量子化した実際の場合は、量子化しない理想的な場合に量子化誤差が乗っていると考える。つまり、単なるノイズとして取り扱う。



# なぜディジタル化をするのか

ディジタル化 (離散化と量子化) を行うと、理想的な状況では連続時間制御系以上の性能は出ない。

**ではなぜディジタル制御系を使うのであろうか?**

- ノイズの軽減 (アナログラインを長く引き伸ばす必要が無い)
- 誤差の軽減 (コントローラ内のノイズ・揺らぎの影響を受けない)
- コントローラの小型化
- 柔軟性 (プログラムを変更するだけで挙動を変えることができる)
- 複雑な制御が可能 (アナログ制御器では複雑な回路が必要)
- 安価 (昔は逆に高価であったが...)



# 信号処理の復習

## $z$-変換 (1)

離散時間信号 $\{x(k)\}$: $x(0), x(1), x(2), \ldots$
負の時間の信号はゼロと仮定

### (片側)$z$-変換

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

$\{x(k)\}$ の $z$-変換を

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$$

で表す。

**[参考]** 両側 $z$-変換:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

負の時間の信号はゼロ、と仮定できれば、片側と両側の $z$-変換は同じ



## $z$-変換 (2)

- 本当は $z$ は複素数で $z$ 変換の定義の級数の収束域を考える必要がある。
- $\{x(k)\}$ が指数的オーダの信号ならば収束域は存在する。
- ただし、$z$ を単なる記号とみなしても、それほど困らない (演算子法的な考え方・解析接続したものと考える)。

### 逆 $z$-変換

留数定理より

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_U X(z) z^{k-1} dz$$

ただし、$U$ は $X(z)$ の極を全て含む (言い方を変えれば収束しない領域を全て含む) ような閉路

**実用的な逆 $z$-変換**: $X(z)$ を $z^{-1}$ のベキ級数で表すと、定義より

$$X(z) = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \cdots$$



## $z$-変換の性質 (1)

### 線形性

$a, b$ を任意のスカラー定数としたとき、

$$\mathcal{Z}[ax(k) + by(k)] = aX(z) + bY(z)$$

証明 $\mathcal{Z}\{ax(k) + by(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{ax(k) + by(k)\} z^{-k} = aX(z) + bY(z)$

### 時間シフト

$x(k) = 0\ (k < 0)$、および $s$ を非負の整数とすると、

$$z^{-s} X(z) = \mathcal{Z}[x(k-s)]$$

証明 $z^{-s} X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k-s} = \sum_{k'=0}^{\infty} x(k'-s) z^{-k'} = \mathcal{Z}[x(k-s)]$



## $z$-変換の性質 (2)

### 合成積則 1

$\{x_1(k)\}$ と $\{x_2(k)\}$ のたたみこみ和

$$y(k) = \sum_{m=0}^{k} x_1(m) x_2(k-m)$$

を $z$-変換したものは、

$$Y(z) = X_1(z) X_2(z)$$

証明 $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} x_1(m) x_2(k-m) z^{-k}$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_1(m) x_2(n) z^{-(m+n)} = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) z^{-m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = X_1(z) X_2(z)$$

## $z$-変換の性質 (3)

### 合成積則 2

$y(k) = x_1(k)x_2(k)$ の $z$-変換は、

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_U X_1(z_1)X_2(z/z_1)z_1^{-1}dz_1$$

単位円が収束域に含まれるならば、$z = e^{j\omega T}, z_1 = e^{j\omega_1 T}$ を代入し、

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_1(e^{j\omega T})X_2(e^{j(\omega-\omega_1)T})d\omega_1$$

<u>証明</u> $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi j}\oint_U X(z_1)z_1^{k-1}dz_1\right\}x_2(k)z^{-k} =$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_U X_1(z_1)\sum_{k=0}^{\infty}x_2(k)(z/z_1)^{-k}z_1^{-1}dz_1 = \frac{1}{2\pi j}\int_U X_1(z_1)X_2(z/z_1)z_1^{-1}dz_1$$



## $z$-変換の性質 (4)

### 最終値定理

$\{x(k)\}$ が $k \to \infty$ のとき、ある値 $x_\infty$ に収束するならば、

$$x_\infty = [(1 - z^{-1})X(z)]_{z=1}$$

ただし、$x(k) = 0$ $(k < 0)$ とする。

<u>証明</u>

$$\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z) = \lim_{z\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}x(k)(z^{-k} - z^{-k-1})$$

$$= \lim_{z\to 1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(x(k) - x(k-1))z^{-k} \quad \text{(収束のオーダを揃える)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}x(n)$$



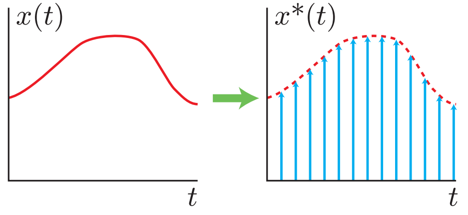
## $z$-変換とラプラス変換の関係 (1)

### サンプリング

連続時間信号 $x(t)$ $(t \geq 0)$ を、周期 $T$ でサンプリング

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t - kT)$$

ただし、$\delta(\cdot)$ は Dirac の $\delta$ 関数。
$x^*(t)$ を" インパルス変調列" という ("列" という名前だが、あくまでも連続時間信号)。






## $z$-変換とラプラス変換の関係 (2)

$x^*(t)$ をラプラス変換すると、定義より

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-ksT}$$

一方、$\{x(kT)\}$ の $z$-変換は、

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$$

$z = e^{sT}$ を $z$-変換に代入すると、**インパルス変調した信号のラプラス変換**になる。

$$X(e^{sT}) = X^*(s)$$

## $z$-変換とラプラス変換の関係 (3)

もう一つ、$z$-変換とラプラス変換の関係式がある。

$X(s) = \mathscr{L}[x(t)] = N(s)/D(s)$ が有理式、かつ各々の極が単根と仮定し、その極を $p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ とする。

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x(t)\delta_T(t)] = 2\pi j \sum_{i=1}^{m} \operatorname*{Res}_{p=p_i} \left[ \frac{X(p)}{2\pi j(1 - e^{-(s-p)T})} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lim_{p \to p_i} (p - p_i) X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(s-p_i)T}}$$

$\delta_T(t)$ は定数 1 のインパルス変調列で、$\mathcal{L}[\delta_T] = 1/(1 - e^{-sT})$。

上記の仮定の下で、

$$X(z) = \mathscr{Z}[x(z)] = \sum_{i=1}^{m} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

この結果を使うと、次のような変換表が得られる。



## $z$-変換表

| $f(t)$ | $F(s)$ | $\{f(k)\}$ | $F(z)$ |
|---|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $\{1, 0, 0, \ldots\}$ | $1$ |
| $\mathbf{1}(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\{1, 1, 1, \ldots\}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $kT$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-akT}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |
| $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $kTe^{-akT}$ | $\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$ |
| $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos k\omega T$ | $\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$ |
| $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin k\omega T$ | $\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$ |
| $e^{-at}\cos\omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $e^{-akT}\cos k\omega T$ | $\frac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}}$ |
| $e^{-at}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $e^{-akT}\sin k\omega T$ | $\frac{e^{-aT}z\sin\omega T}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}}$ |



## サンプリング定理 (1)

連続時間信号: $x(t) \to$ フーリエ変換可能と仮定 ($\tilde{X}(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$)

**逆フーリエ変換と積分区間の細分化**:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=\infty}^{-\infty} \int_{(2m-1)\pi/T}^{(2m+1)\pi/T} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega nT} d\omega \qquad (*)$$

$$= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{X}(\omega') e^{j\omega' nT} d\omega'$$

ここで、

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{X}\left(\omega + \frac{2\pi m}{T}\right)$$

$\hat{X}(\omega)$ は周期 $2\pi/T$ の周期関数なので、フーリエ級数展開すると、(*) 式より、そのフーリエ係数は $x(nT)$



## サンプリング定理 (2)

よって、

$$\hat{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} = X^*(j\omega)$$

つまり、$\hat{X}$ はインパルス変調列のフーリエ変換 ($\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}[x^*(t)]$)

**仮定 (ナイキスト条件)**

ここで、元の信号 $x(t)$ に $\omega_s = \pi/T$ 以上の周波数成分が無いと仮定する。

$$\tilde{X}(\omega) = 0 \quad (|\omega| \geqq \omega_s)$$

$\omega_s$ をナイキスト角周波数という。

すると、$\hat{X}(\omega)$ の定義より、

$$\tilde{X}(\omega) = H(\omega) \cdot T\hat{X}(\omega)$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < \omega_s) \\ 0 & (|\omega| \geqq \omega_s) \end{cases}$$

## サンプリング定理 (3)

フーリエ級数の掛け算 → 元の信号ではたたみ込み積分

$$x(t) = T\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x^*(t-\tau)d\tau$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s}^{\omega_s} e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{T}\frac{\sin(\omega_s t)}{\omega_s t}$$

### サンプリング定理 (標本化定理)

ナイキスト条件を満たすならば、サンプル点だけの信号 $\{x(kT)\}$ から、元の信号を再生できる。

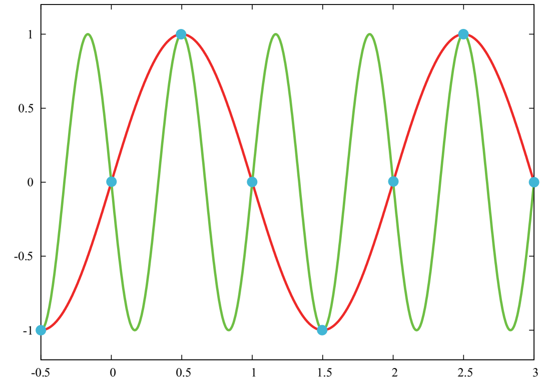
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\frac{\sin(\omega_s(t-kT))}{\omega_s(t-kT)}$$



## サンプリング定理 (4)

ナイキスト条件を満たしていなければ、**原理的に元の信号を再生できない**。

たとえば、$T = 0.5$ のときを考え、サンプル点の情報のみから、$\sin(\pi t)$ と $-\sin(3\pi t)$ の信号は区別できない。



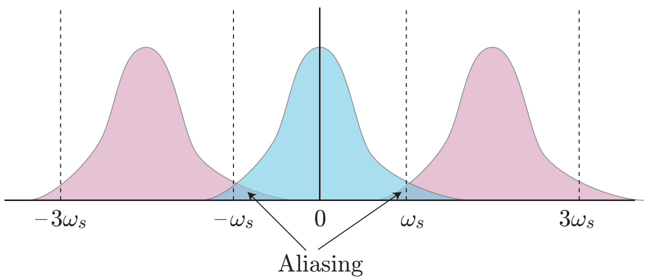



## サンプリング定理 (5)

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{X}\left(\omega + \frac{2\pi m}{T}\right)$$

からわかるように、ナイキスト条件を満たしていないと、$\omega_s$ 以上の成分が $\omega_s$ 未満の領域に重なってしまう。

$\Longrightarrow$ **(周波数) エリアシング**



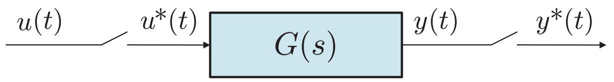

絶対値でみると、実数関数のフーリエ変換は左右対称なので、ナイキスト角周波数で折り返しているように見える。



# サンプル値系とパルス伝達関数

# パルス伝達関数 (1)

$u^*(t)$ と $y^*(t)$ の関係を明らかにしたい。




- $u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t-kT), \quad y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t-kT)$
- $G(s)$ のインパルス応答を $g(t)$ とおく。
- $Y(s) = G(s)U^*(s) = G(s)\mathscr{L}[u^*(t)]$
- $y(nT) = \int_0^{nT} g(nT-\tau)u^*(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{n} g((n-k)T)u(kT)$ より

  $y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \sum_{n=k}^{\infty} g((n-k)T)\delta(t-nT)$。ラプラス変換の定義式に代入し変数変換すれば、$Y^*(s) = \mathscr{L}[y^*(t)] = U^*(s)G^*(s)$。ここで、$G^*(s)$ は $G(s)$ のインパルス応答 $g(t)$ のインパルス変調列のラプラス変換。
- 一般に、$G(s) \neq G^*(s)$



# パルス伝達関数 (2)

$Y_D(z) = \mathscr{Z}[y(kT)], U_D(z) = \mathscr{Z}[u(kT)]$ とすると、

$$Y_D(e^{sT}) = Y^*(s), \quad U_D(e^{sT}) = U^*(s)$$

## $G^*(s)$ に対応する $z$ 変換 (パルス伝達関数)

$$G_D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}$$

$z$ 変換の関係式:

$$Y_D(z) = G_D(z)U_D(z)$$

- インパルス応答間の伝達関数なので、$G_D(z)$ は**パルス伝達関数**と呼ばれる。一般には、**離散時間伝達関数**というべき
- $G_D(e^{sT})$ は $G(s)$ にならずに $G^*(s)$ になることに注意。
  $\Longrightarrow z = e^{sT}$ ではなく、$z$-変換表を使って、$G(s)$ から $G_D(z)$ に変換

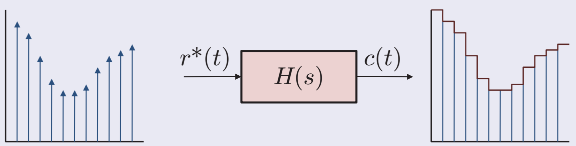


# ホールダ (1)

実際の制御対象に入力するのは、インパルス変調列でなく**階段状関数**。

## ホールダ

インパルス変調列を階段状関数に変換




**ホールダの働き**: 単位インパルスを積分 → 単位ステップ $(1/s)$
単位ステップを $T$[sec] 遅延 → 時間がずれた単位ステップ $(e^{-sT}/s)$
2 つの単位ステップを引き算 → 1 つ分の矩形パルス $((1-e^{-sT})/s)$

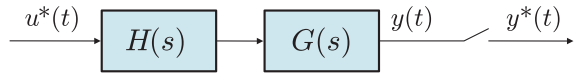
## ホールダの伝達関数

$$H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$



# ホールダ (2)

**ホールダ付きの制御対象の $z$-変換**




$$HG(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathscr{Z}[\mathscr{L}^{-1}[(1-e^{-sT})(G(s)/s)]^*]$$

ここで、$G(s)/s$ のインパルス応答を $f(t)$ と書くと、

$$\begin{aligned} HG(z) &= \mathscr{Z}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(f(kT)-f((k-1)T))\delta(t-kT)\right] \\ &= (1-z^{-1})\mathscr{Z}[f^*(t)] \\ &= (1-z^{-1})\mathscr{Z}[\mathscr{L}^{-1}G(s)/s]^*] \end{aligned}$$

## ホールダ (3)

**例:**

$$G(s) = \frac{1}{1+as}$$

- $H(s)G(s)$ を部分分数展開する。

$$H(s)G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{1+as} = (1-e^{-sT})\left(\frac{1}{s} - \frac{a}{1+as}\right)$$

- 有理式の部分は各項別に $z$-変換表を使って $z$ 変換する。$e^{-sT}$ は $z^{-1}$ と置き換えられる。

$$HG(z) = (1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T/a}z^{-1}}\right) = \frac{1-e^{-T/a}}{z-e^{-T/a}}$$

$G(s)$ がプロパーな有理式なら $HG(z)$ もプロパーな有理式



## 差分方程式と離散時間伝達関数

離散時間の有限次元線形系の差分方程式表現:

$$y(t) = -a_{n-1}y(t-1) - \cdots - a_0 y(t-n) + b_n u(t) + \cdots + b_0 u(t-n)$$

両辺の $z$ 変換を取ると、

$$Y(z) = -a_{n-1}z^{-1}Y(z) - \cdots - a_0 z^{-n}Y(z) + b_n U(z) + \cdots + b_0 z^{-n}U(z)$$

**$G(z)$: 離散時間伝達関数**

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_n + \cdots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}}$$

伝達関数の分子分母に $z^n$ を掛けて、$z$ のべきの形に整理すると、

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_n z^n + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$



## 離散時間伝達関数の性質 (1)

- 分子分母 $z$ のべきの形にしたときの分母多項式の零点、すなわち、

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

  の根を、伝達関数の極あるいは系の極という。
- 同様に、分子多項式の零点、すなわち、

$$b_n z^n + \cdots + b_0 = 0$$

  の根を、伝達関数の零点あるいは系の零点という。
- 因果的なシステム (未来の入力が現在の出力に影響を及ぼさない) において、伝達関数の分子分母を $z$ のべきの形に整理すると、

  (分子の次数) $\leq$ (分母の次数)

  である。これを満たす伝達関数を**プロパーな伝達関数**という。また、(分子の次数) $<$ (分母の次数) ならば ($b_n = 0$)、**厳密にプロパー**であるという。



## 離散時間伝達関数の性質 (2)

- 直列結合は、伝達関数の積である。直列結合の順番を変えても全体の伝達関数は不変である。
- 並列結合は、伝達関数の和である。
- $G(z)$ を $z^{-1}$ のベキで表した時の係数の列を (離散時間伝達関数の) **インパルス応答**という。

$$G(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots$$

- インパルス応答 $\{h(t)\}$ を持つ系の出力は、

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{t} h(\tau)u(t-\tau)$$

  ただし、$t < 0$ に対して $u(t) = 0, y(t) = 0$ の場合。
  これは、$G(z)$ と $U(z)$ を $z^{-1}$ のベキ級数で表して、掛け算すると証明できる。

# 離散時間状態空間表現

## 状態空間モデルの導出 (1)

差分方程式表現:

$$y(t) = -a_{n-1}y(t-1) - \cdots - a_0 y(t-n) + b_n u(t) + \cdots + b_0 u(t-n)$$

の別表現を求めよう。

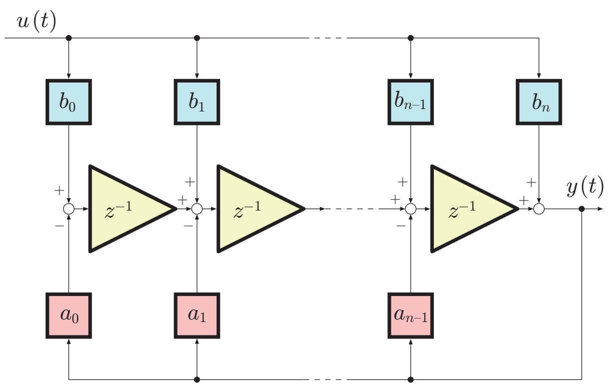
$$\begin{aligned} Y(z) = b_n U(z) + z^{-1}(&-a_{n-1}Y(z) + b_{n-1}U(z) \\ &+ z^{-1}(-a_{n-2}Y(z) + b_{n-2}U(z) + \cdots \\ &\cdots + z^{-1}(-a_0 Y(z) + b_0 U(z)) \cdots)) \end{aligned}$$

と変形



## 状態空間モデルの導出 (2)

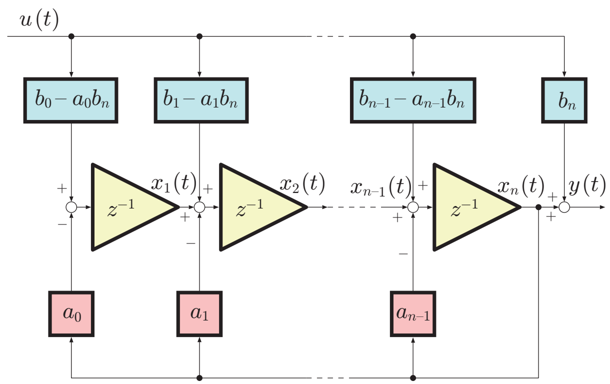
ブロック線図:






## 状態空間モデルの導出 (3)

$$\frac{b_n z^n + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0} = b_n + \frac{(b_{n-1} - a_{n-1}b_n)z^{n-1} + \cdots + (b_0 - a_0 b_n)}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$ のように変形



## 状態空間モデルの導出 (4)

状態変数 $x_1(k),\dots,x_n(k)$ で表現

### 可観測正準形 (可観測標準形, observable canonical form)

状態変数ベクトル: $x = (x_1,\dots,x_n)^\top$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (0 \ \cdots \ 0 \ 1)x(k) + b_n u(k)$$

となる。ただし、$c_i = b_i - a_i b_n$

$$G(z) = \frac{b_n z^n + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0} = b_n + \frac{c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

は上記の可観測正準系に変換される



## 状態空間モデル (1)

### 状態空間モデル (1 入力 1 出力系)

$A$: $n\times n$ 行列, $b$: $n$ 次元列ベクトル, $c$: $n$ 次元行ベクトル, $d$: スカラーとしたとき、

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

$n$ をシステムの次元と呼ぶ

**(注意 1)** $A, b, c, d$ は時間 $t$ に関して不変である。もし、これらが時間に依存するならば、システムは時不変線形系ではなく、時変線形系となる。
**(注意 2)** 異なる状態空間表現が同じ入出力関係を与えることがありうる。これは、状態 $x$ の定義の違いによるものである。



## 状態空間モデル (2)

### 座標変換: $x' = Tx$

$$x'(k+1) = Tx(k+1) =$$
$$T(Ax(k) + bu(k)) = TAT^{-1}x'(k) + Tbu(k)$$
$$y(k) = cT^{-1}x'(k) + du(k)$$

### 座標変換 $x' = Tx$ で変換された後のシステム

$$x'(k+1) = A'x'(k) + b'u(k)$$
$$y(k) = c'x'(k) + d'u(k)$$

ただし、

$$A' = TAT^{-1}, \qquad b' = Tb$$
$$c' = cT^{-1}, \qquad d' = d$$



## 離散時間線形系の一般解 (1)

### 離散時間線形系の一般解

初期状態: $x(0) = x_0$, 入力: $u(0), u(1), u(2), \dots$

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau-1} bu(\tau)$$

出力は、

$$y(k) = cA^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} cA^{k-\tau-1} bu(\tau) + du(k)$$

## 離散時間線形系の一般解 (2)

**(注意 1)** インパルス応答 $\{h(k)\}$ を持つ系の出力:

$$y(k) = \sum_{\tau=0}^{k} h(\tau)u(k-\tau)$$

これは、一般解において、$x_0 = 0, \quad h(k) = \begin{cases} d & (k=0) \\ cA^{k-1}b & (k=1,2,\dots) \end{cases}$

とおいたものである。

**(注意 2)** 連続時間系、

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx + du$$

の一般解、

$$x(t) = \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau$$

と比較すると、$\exp(At)$ の部分が $A^k$ のようになっていることがわかる。



## 伝達関数表現への変換 (1)

両辺を $z$-変換

$$zX(z) = AX(z) + bU(z), \quad Y(z) = cX(z) + dU(z)$$

$X(z)$ を消去

$$Y(z) = \{c(zI_n - A)^{-1}b + d\}U(z)$$

### 状態空間表現 → 伝達関数表現

システム $(A, b, c, d)$ の伝達関数は、

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = c(zI_n - A)^{-1}b + d$$



## 伝達関数表現への変換 (2)

多入力多出力系の場合は、**伝達関数行列**を考える。

$$Y(z) = G(z)U(z), \quad G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \cdots & C_{1m}(z) \\ & \cdots & \\ G_{\ell 1}(x) & \cdots & C_{\ell m}(x) \end{bmatrix}$$

多入力多出力系の場合も同様に

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

は

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

に変換される。



## 連続時間状態空間表現からの変換 (1)

**連続時間系**:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u$$
$$y = C_c x + D_c u$$

を、サンプリング区間を $T$ として、離散化する。
解の公式より、

$$x((k+1)T) = \exp(A_c T)x(kT) + \int_0^T \exp(A_c\tau)d\tau B_c u(kT)$$

## 連続時間状態空間表現からの変換 (2)

$x(kT)$ を $x(k)$ と書き直すと、以下の離散時間系を得る。

**0 次ホールダによる離散化表現**

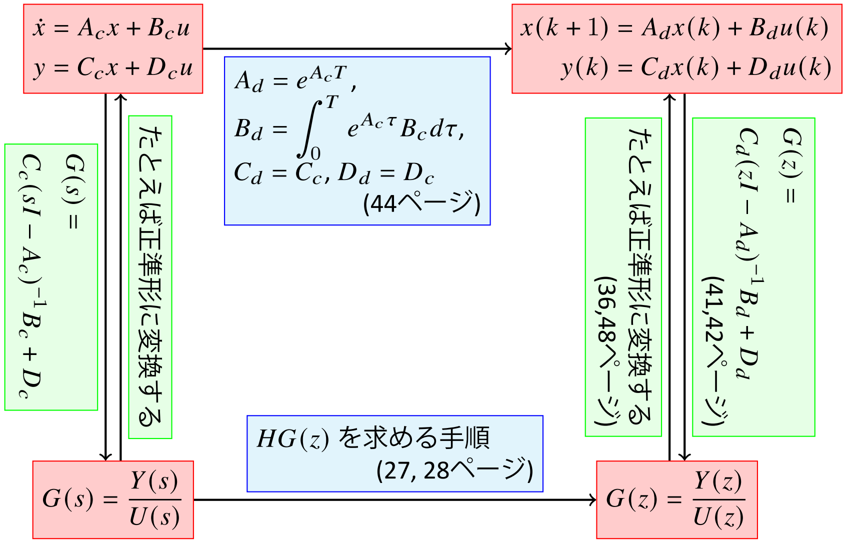
$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$
$$y(k) = C_d x(k) + D_d u(k)$$

ただし、

$$A_d = \exp(A_c T), \quad B_d = \int_0^T \exp(A_c \tau) d\tau B_c$$
$$C_d = C_c, \quad D_d = D_c$$



## 変換のまとめ






## 双対システム

$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ の両辺の転置:

$$G^\top(z) = B^\top(zI - A^\top)^{-1}C^\top + D^\top$$

$m$ 入力 $\ell$ 出力系:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

に対する**双対システム** ($\ell$ 入力 $m$ 出力)

$$x'(k+1) = A^\top x'(k) + C^\top u'(k)$$
$$y'(k) = B^\top x'(k) + D^\top u'(k)$$

- 双対システムの伝達関数行列は、元の系の伝達関数行列の転置
- 特に、**1 入力 1 出力系の場合は、伝達関数が一致**



## 双対システムと座標変換

**元のシステム**

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{座標変換} \\ \bar{x} = Tx \\ \Longrightarrow \end{array} \quad \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB$
$\bar{C} = CT^{-1}, \bar{D} = D$

**双対システム**

$$\begin{cases} z(k+1) = A^\top z + C^\top u' \\ y' = B^\top z + D^\top u' \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{座標変換} \\ \bar{z} = (T^\top)^{-1} z \\ \Longrightarrow \end{array} \quad \begin{cases} \bar{z}(k+1) = \bar{A}^\top \bar{z} + \bar{C}^\top u' \\ y' = \bar{B}^\top \bar{z} + \bar{D}^\top u' \end{cases}$$

$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB$
$\bar{C} = CT^{-1}, \bar{D} = D$

赤の部分が一致するためには双対システムの座標変換は青のようにしなくてはならない

# 可制御正準形 (1)

可観測正準形の双対システム: 同じ入出力関係を持つ

## 可制御正準形 (可制御標準形)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) x(k) + b_n u(k)$$

ただし、$c_i = b_i - a_i b_n$

本来、可到達正準形と呼ぶべき。慣習的に可制御正準形という。

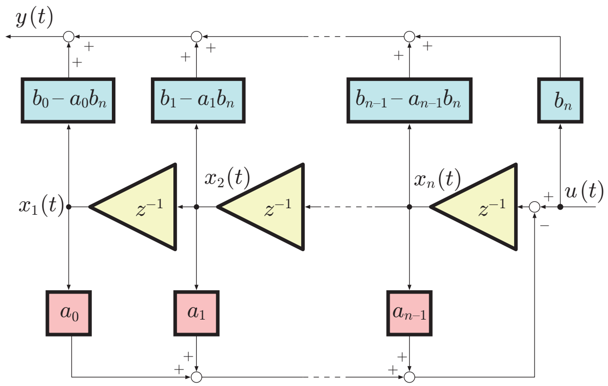
$$G(z) = \frac{b_n z^n + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = b_n + \frac{c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

と比較せよ。



# 可制御正準形 (2)

可制御正準形のブロック線図:






# 可到達性・可観測性

# 可到達性・可観測性とは

**可到達でない系の例**

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c} b_1 \\ \hline 0 \end{array}\right) u(k)$$

$x_2$ に、直接、あるいは間接的にも入力は作用しない。

**可観測でない系の例**

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_2 & A_3 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + bu(k)$$

$$y(k) = \left( \begin{array}{c|c} c_1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + du(k)$$

出力に、直接、あるいは間接的にも $x_2$ は作用しない。

# 可到達性の定義

## 可到達性の定義

原点から、**任意の終端点** $x_f$ **に有限時間内に到達**できる入力列が存在すれば、その系は可到達であるという。

## 可制御性の定義

任意の初期点 $x_s$ から、原点に有限時間内に到達できる入力列が存在すれば、その系は可制御であるという。

- 連続時間系では、

  (可制御性) = (可到達性)

  であったが、離散時間系の場合は、

  (可制御な系) ⊃ (可到達な系)
- **本質的なのは、可到達性**のほうである。
- 離散時間系の場合でも、上記の可到達性のことを称して可制御性とよんでいる場合も多い。



# 可観測性の定義

## 可観測性の定義

入力 $u(k)$ が既知のとき、有限の出力列 $y(0), y(1), y(2),..., y(N)$ の観測値から、システムの初期値 $x(0)$ を一意に決定することができるのであれば、システムは可観測であるという。

- こちらのほうは、連続時間系と同じ。
- 「現在の状態 $x(N)$ を一意に決定」と定義を変更してしまうと、離散時間系では違う定義になる。一方、連続時間線形系の場合は同値であった。



# 可到達性の条件 (1)

$N$ ステップ目で $x_f$ に到達できる条件を求める。

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-j-1} Bu(j) \ (= x_f)$$

より、

$$[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{N-1}B] \begin{pmatrix} u(N-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} = x_f - A^N x_0$$

初期値 $x_0$ から時刻 $N$ に**任意の** $x_f$ に到達するための必要十分条件は、

$$\mathrm{rank}\,[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{N-1}B] = n$$



# 可到達性の条件 (2)

Cayley-Hamilton の定理から、$N \geq n$ ならば、

$$\mathrm{rank}\,[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{N-1}B] = \mathrm{rank}\,[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$$

## 可到達性の必要十分条件

系が可到達であるための必要十分条件は、

$$\mathrm{rank}\,[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B] = n$$

である。$[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$ を可到達性行列という。

## (参考)　可制御性の必要十分条件

系が可制御であるための必要十分条件は、

$$\dim\{\mathrm{span}\,[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B] \cap \mathrm{Im}A\} = \dim \mathrm{Im}A$$

## 可観測性の条件 (1)

解の公式より

$$
\begin{aligned}
Cx(0) &= y(0) - du(0) \\
CAx(0) &= y(1) - du(1) - CBu(0) \\
CA^2x(0) &= y(2) - du(2) - \sum_{j=0}^{1} CA^{1-j}Bu(j) \\
&\vdots \\
CA^{N-1}x(0) &= y(N-1) - du(N-1) - \sum_{j=0}^{N-2} CA^{N-j-2}Bu(j)
\end{aligned}
$$



## 可観測性の条件 (2)

よって、

$$
\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} y(0) - du(0) \\ y(1) - du(1) - CBu(0) \\ y(2) - du(2) - \sum_{j=0}^{1} CA^{1-j}Bu(j) \\ \vdots \\ y(N-1) - du(N-1) - \sum_{j=0}^{N-2} CA^{N-j-2}Bu(j) \end{pmatrix}
$$



## 可観測性の条件 (3)

Cayley-Hamilton の定理を用いると次の定理が得られる。

**可観測性の必要十分条件**

系が可観測であるための必要十分条件は、

$$
\mathrm{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n
$$

である。($n$ = 系の次数)



## 可制御正準形への変換 (1)

1 入力 1 出力の可到達システム

$$
x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \qquad y(k) = cx(k) + du(k)
$$

を、座標変換

$$
x'(k) = T_1 x(k)
$$

によって可制御正準形に変換することを考える。

- $A$ の特性多項式を、

$$
\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0
$$

  とする。
- また、可到達性行列 (可制御性行列) を

$$
U_c = [b \; Ab \; A^2b \; \cdots \; A^{n-1}b]
$$

## 可制御正準形への変換 (2)

### 可制御正準形へ変換する変換行列

**変換行列**

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} U_c^{-1}$$

により系は**可制御正準形へ変換**される。

証明は次の頁以降



## 可制御正準形への変換 (3)

**(証明)**:

$$T_1^{-1} = [t_1\ t_2\ \cdots\ t_n]$$

とおくと、

$$t_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-i-1} a_{j+i} A^j b + A^{n-i} b & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ b & (i = n) \end{cases}$$

となる。そのとき、

$$\begin{aligned} At_1 &= -a_0 b = -a_0 t_n \quad \text{(Cayley-Hamilton の定理)} \\ At_2 &= t_1 - a_1 b = t_1 - a_1 t_n \\ &\vdots \\ At_n &= t_{n-1} - a_{n-1} t_n \end{aligned}$$



## 可制御正準形への変換 (4)

よって、

$$A[t_1 \cdots t_n] = [t_1 \cdots t_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。また、$[t_1 \cdots t_n](0 \cdots 0\,1)^\top = b$ であるので、

$$T_1 A T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad T_1 b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。
変換後の $c$ は、$cT_1^{-1}$ を用いて求めることができる。



## 可観測正準形への変換 (1)

可観測な 1 入力 1 出力系

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \qquad y(k) = cx(k) + du(k)$$

を、座標変換

$$x'(k) = T_2 x(k)$$

によって可観測正準形に変換することを考える。

- $A$ の特性多項式を、

  $$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

  とする。
- 可観測性行列を

  $$U_o = [c^\top\ (cA)^\top\ (cA^2)^\top\ \cdots\ (cA^{n-1})^\top]^\top$$

  とする。

# 可観測正準形への変換 (2)

## 可観測正準形への変換行列

$$T_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} U_o$$

により**系は可観測正準形へ変換**される。

証明は次のページ以降。



# 可観測正準形への変換 (3)

**(証明)**

$$T_2 = [t_1^\top \ \cdots \ t_n^\top]^\top$$

とおくと、

$$t_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-i-1} a_{j+i} cA^j + cA^{n-i} & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ c & (i = n) \end{cases}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} t_1 A &= -a_0 c = -a_0 t_n \\ t_2 A &= t_1 - a_1 c = t_1 - a_1 t_n \\ &\vdots \\ t_n A &= t_{n-1} - a_{n-1} t_n \end{aligned}$$



# 可観測正準形への変換 (4)

つまり、

$$[t_1^\top \ \cdots \ t_n^\top]^\top A = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} [t_1^\top \ \cdots \ t_n^\top]^\top$$

が成り立つ。また、$(0 \cdots 0\,1)[t_1^\top \ \cdots \ t_n^\top]^\top = c$ であるので、

$$T_2 A T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad cT_2^{-1} = (0 \cdots 0\,1)$$

なりたつ。
変換後の $b$ は、$T_2 b$ を用いて求めることができる。



# 座標変換と可到達性・可観測性 (1)

## 座標変換に対する不変性

座標変換 $z(k) = Tx(k)$ により、

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z(k+1) &= \tilde{A}z(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}z(k) + Du(k) \end{aligned}$$

と変換されたとする。そのとき、この 2 つの系の**可到達性は一致**する。また、この 2 つの系の**可観測性も一致**する。

可到達性・可観測性は座標変換に対して不変な性質である。

# 座標変換と可到達性・可観測性 (2)

**(証明)**

$$[\tilde{B}\ \tilde{A}\tilde{B}\ \cdots\ \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] = T[B\ AB\ \cdots, A^{n-1}B]$$

および、

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T^{-1}$$

より明らか。



# 可到達正準分解

システムが不可到達と仮定すると、rank $U_c = s < n$。よって、行フルランクな $(n-s)\times n$ 行列 $T_2$ が存在して、

$$T_2 U_c = T_2 \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

となる。$T = [T_1^\top, T_2^\top]^\top$ が正則となるように適切に $T_1$ を補えば、以下のことが言える。

## 可到達正準分解

座標変換 $z = Tx$ によって、システムは**可到達正準分解**され、

$$z(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right] z(k) + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(k)$$

のように変換される。

- これは、$T_2 B = 0$、および $T_2 A U_c = 0$ より $T_2 A = A_3 T_2$ と書けることより証明される。
- $T_2 x(k)$ は不可到達な状態変数 (不可到達なモード) と呼ばれる。



# 可観測正準分解

システムが不可観測と仮定すると、rank $U_o = s < n$。よって、行列 $P$ が存在して $s \times n$ 行列 $T_1 = PU_o$ を行フルランクにできる。$T = [T_1^\top, T_2^\top]^\top$ が正則となるように適切に $T_2$ を補えば、以下のことが言える。

## 可観測正準分解

座標変換 $z = Tx$ によって、システムは**可観測正準分解**され、

$$z(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_2 & A_3 \end{array}\right] z(k) + bu(k)$$

$$y(k) = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \end{array}\right] z(k) + du(k)$$

のように変換される。

- $T_1 x(k)$ は可観測な状態変数と呼ばれる。



# 可到達・可観測な空間

- **行ベクトル空間** (係数空間 ⇒ 変数を表す)
  - 可到達な変数 (行ベクトル空間) は一意に決まらない
  - 不可到達な変数 (行ベクトル空間) は一意に決まる⇒左固有空間
  - 可観測な変数 (行ベクトル空間) は一意に決まる⇒左固有空間
  - 不可観測な変数 (行ベクトル空間) は一意に決まらない
- **列ベクトル空間** (状態の動きを表す)
  - 可到達な列ベクトル空間は一意に決まる⇒右固有空間
  - 不可到達な列ベクトル空間は一意に決まらない
  - 可観測な列ベクトル空間は一意に決まらない
  - 不可観測な列ベクトル空間は一意に決まる⇒右固有空間

よって、

- 不可到達なモード・可観測なモードは左固有空間と固有値の組
- 可到達なモード・不可観測なモードは右固有空間と固有値の組

## 不可到達な系の伝達関数表現 (1)

**可到達正準分解されたシステム**:

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right] x(k) + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(k)$$

の伝達関数は、

$$\begin{aligned} G(z) &= \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array}\right] \left(zI - \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right]\right)^{-1} \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] + D \\ &= C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D \end{aligned}$$

となり、**不可到達なモードの数だけ次数が低くなる。**
不可観測な場合も同様。



## 不可到達な系の伝達関数表現 (2)

- **伝達関数は系の可到達かつ可観測な部分だけの特性**を表わしたものである。
- 伝達関数への変換公式を使うと、不可到達あるいは不可観測な部分システムに対応する動特性が隠れる。つまり、**伝達関数の分子と分母で極・ゼロ点の相殺**が起きる。



## サンプル値系の可到達性・可観測性

可到達・可観測な連続時間系をゼロ次ホールダを用いて、サンプル値系に変換しても、**サンプリング間隔 $T$ によっては可到達性・可観測性が保存されない**ことがある。

**[例]** 連続時間系 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$ をサンプリング間隔 $T$ で離散化

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \cos\omega T & \sin\omega T \\ -\sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix} x(k) + \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} 1-\cos\omega T \\ \sin\omega T \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(k) \end{aligned}$$

$\omega T = n\pi\ (n = 1, 2, \ldots)$ ならば、

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} x(k) + \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} 1 \mp 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k),\ y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

で**可到達性・可観測性の両方ともに満たされない。**



# 安定性

## 安定性の定義 (1)

### (リアプノフ) 安定性

入力無しのシステム

$$x(k+1) = f(x(k))$$

の原点が **(リアプノフ) 安定**であるとは、任意の $\delta\ (>0)$ に対して $\epsilon\ (>0)$ が存在し、$\|x(0)\| < \epsilon$ ならば $\|x(k)\| < \delta\ (k = 0, 1, \ldots)$ となること。

### 漸近安定性

入力無しのシステム

$$x(k+1) = f(x(k))$$

の原点が**漸近安定**であるとは、系がリアプノフ安定、かつ原点近傍の初期値 $x(0)$ に対し $\|x(k)\| \to 0\ (k \to \infty)$ となること。



## 安定性の定義 (2)

### 大域的 (リアプノフ) 安定性

入力無しのシステム

$$x(k+1) = f(x(k))$$

の原点が**大域的 (リアプノフ) 安定**であるとは、系がリアプノフ安定で、全ての初期値 $x(0)$ に対し、それ以降の状態 $x(t)\ (t > 0)$ が有界であること。

### 大域的漸近安定性

入力無しのシステム

$$x(k+1) = f(x(k))$$

(の原点) が**大域的漸近安定**であるとは、系がリアプノフ安定で、かつ全ての初期値に対し $\|x(k)\| \to 0\ (k \to \infty)$ となること。

- 線形系 $x(k+1) = Ax(k)$ では、大域的性質と局所的性質が一致する。よって、線形系では「大域的」とは言わないことが多い。
- (局所的)(リアプノフ) 安定性を LS, (局所的) 漸近安定性を LAS, 大域的 (リアプノフ) 安定性を GS, 大域的漸近安定性を GAS と略記する。



## (リアプノフ/漸近) 安定性の条件 (1)

**入力無しの離散時間線形系**:

$$x(k+1) = Ax(k)$$

行列 $A$ を**対角化**:

$$A = T^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} T$$

**座標変換**: $z = Tx$
**システムの変換**:

$$x(k+1) = Ax(k) \implies z(k+1) = TAT^{-1}z(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} z(k)$$



## (リアプノフ/漸近) 安定性の条件 (2)

**一般解**:

$$z(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} z(0)$$

$T^{-1}z(0)$ が実数となる全ての初期値 $z(0)$ に対して、

- $z(k)$ が有界であるための条件: $|\lambda_i| \le 1\ (i = 1, \ldots, n)$
- $z(k)$ がゼロに収束する条件: $|\lambda_i| < 1\ (i = 1, \ldots, n)$

- **(リアプノフ) 安定である必要十分条件**は、$A$ の**全ての固有値の絶対値が 1 以下** (ただし、幾何学的重複度と代数的重複度が異なる固有値に対しては 1 未満) となることである。
- **漸近安定である必要十分条件**は、$A$ の**全ての固有値の絶対値が 1 未満**となることである。

複素数に拡大したため「必要条件」の証明はもう少し精密にすべき。
対角化できない場合も、ジョルダン標準形に相似変換すれば証明可能。

# 入力-状態安定性 (ISS) (1)

次に、**入力付きシステム**: $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ の安定性の定義を行う。

## Input to State Stable; ISS

解が

$$\|x(k)\| \le \beta(\|x(0)\|, k) + \chi\left(\max_{0\le k'<k} \|u(k')\|\right)$$

を満たすならば、システムは**入力-状態安定** (Input to State Stable; **ISS**) であるという。ただし、$\beta(\|x(0)\|, k)$ は $\|x(0)\|$ に関して単調増加、$k$ に関して単調減少な連続関数で、$\beta(0,k) = 0, \beta(\|x(0)\|, k) \to 0$ $(k \to \infty)$。また、$\chi(\cdot)$ は単調増加な連続関数, $\chi(0) = 0$ とする。

## 入力付き線形系の安定性の定義

**入力付き線形系**:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

が「**安定**」であるとは、「**ISS であること**」と定義しよう。



# 入力-状態安定性 (ISS) (2)

**入力付き線形系**:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

が ISS である条件を求めよう。

- ISS であるためには、$u(k) = 0$ のとき漸近安定でなくてはならない。つまり、$A$ の全ての固有値の絶対値が 1 未満である必要がある。
- 逆に、$A$ の全ての固有値の絶対値が 1 未満と仮定し、

$$0 \le \max_i |\lambda_i(A)| = \rho(A) < c < 1$$

**最大特異値**: $\|A\| = \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}$
**ベクトルの大きさとの関係**: $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$
行列 $A$ が $\tilde{A} = T^{-1}AT$ とジョルダン標準形に変換されるとして、

$$\|A^k\| \le m\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot k^m \rho(A)^k < Lc^k \quad (k > 1)$$

ただし、$m$ は最大ジョルダンブロックサイズ。(次のページに続く)



# 入力-状態安定性 (ISS) (3)

解の公式より、

$$\|x(k)\| \le Lc^k\|x(0)\| + L(1-c)^{-1}\|B\|\left(\max_{0\le k'<k} \|u(k')\|\right)$$

となり $\beta(\|x(0)\|, k) = Lc^k\|x(0)\|, \chi(d) = L(1-c)^{-1}\|B\|d$ とすれば、ISS の条件を満たす。

## 入力付き時不変離散時間線形系の安定条件

入力付き時不変離散時間線形系が **ISS であるための必要十分条件**は **$A$ の全ての固有値の絶対値が 1 未満**であることで、入力無しシステムの漸近安定性と一致する。



# 伝達関数の安定性 (1)

一方、(パルス) 伝達関数:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z)$$

で表されたシステムの安定性は BIBO 安定性で定義される。

## BIBO 安定性

全ての有界な入力に対する出力がやはり有界ならば、システムは BIBO 安定 (Bounded-Input Bounded-Output Stable) であるという。

## 伝達関数の安定性 (2)

伝達関数に対応する、可到達可観測なシステム (**最小実現**と呼ばれる):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(x), \quad y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

ここで、重複固有値がないと仮定し、ある座標変換で $A$ **は対角化されている**とする。すると、可到達可観測の仮定より、$B$ の各行 $(b_i)$, $C$ の各列 $(c_i)$ は非ゼロベクトル。$\lambda_1$ の絶対値が一番大きいと仮定する。初期値ゼロ, $u(i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $u(0) = 1$ に対応する挙動は

$$y(k) = CA^{k-1}Bu(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k c_i b_i$$

$k$ が十分大きければ、$\lambda_1$ の項が支配的となり、$\|\lambda_1\| \geq 1$ ならば $\|y(k)\|$ は発散する。
逆に全ての固有値の絶対値が 1 未満なら ISS となるので、$y(k)$ は有界。

### BIBO 安定性の必要十分条件 (中間結果)

BIBO 安定性の必要十分条件は、その最小実現が ISS となること。

重複固有値がある場合も同様に証明できる。



## 伝達関数の安定性 (3)

コンパニオン形式 (可到達正準形, 可観測正準形の $A$ 行列)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

の特性多項式は $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$。
つまり、

可到達かつ可観測ならば、$A$ の特性多項式と、伝達関数の分母多項式 (最高次の係数を 1 とした場合) は一致する。

### BIBO 安定性の必要十分条件

BIBO 安定性の必要十分条件は、伝達関数の**全ての極の絶対値が 1 未満**となること。



## Schur-Cohn-Jury の安定判別法 (1)

連続時間の場合のラウス・フルビッツ法と同様に、**実際に極/固有値を求めることなしに安定性を調べる方法**を考えよう。
**特性多項式**: $a_0 > 0$ となるように全体にスカラーを掛ける。

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (a_0 > 0)$$

### Schur-Cohn-Jury の安定判別の手順 (1)

多項式、

$$f_j(z) = a_{n-j}^{(j)} z^{n-j} + \cdots + a_1^{(j)} z + a_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

を、次の漸化式で求める。

$$f_0(z) = f(z)$$
$$f_{j+1}(z) = a_0^{(j)} f_j(z) - a_{n-j}^{(j)} f_j^*(z)$$

ただし $f_j^*(z) = a_0^{(j)} z^{n-j} + \cdots + a_{n-j-1}^{(j)} z + a_{n-j}^{(j)}$



## Schur-Cohn-Jury の安定判別法 (2)

### Schur-Cohn-Jury の安定判別の手順 (2)

**系が安定であるための必要十分条件**は、

$$a_0^{(1)} < 0$$
$$a_0^{(j)} > 0, \quad j = 2, \ldots, n$$

## 双一次変換を用いる方法 (1)

### 双一次変換

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \qquad z = \frac{1+w}{1-w}$$

双一次変換 $z \to w$ は**単位円を左半平面に移す**。

$$G(z) = \frac{(z-\mu_1)\cdots(z-\mu_m)}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)}$$

に代入

$$G\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{\dfrac{(\mu_1+1)w-(\mu_1-1)}{1-w}\cdots\dfrac{(\mu_m+1)w-(\mu_m-1)}{1-w}}{\dfrac{(\lambda_1+1)w-(\lambda_1-1)}{1-w}\cdots\dfrac{(\lambda_n+1)w-(\lambda_n-1)}{1-w}}$$
$$= \frac{(1-w)^{n-m}\{(\mu_1+1)w-(\mu_1-1)\}\cdots\{(\mu_m+1)w-(\mu_m-1)\}}{\{(\lambda_1+1)w-(\lambda_1-1)\}\cdots\{(\lambda_n+1)w-(\lambda_n-1)\}}$$
$$= P_w(w)/Q_w(w)$$



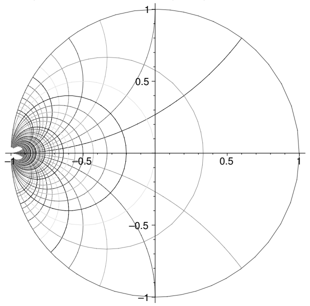
## 双一次変換を用いる方法 (2)

$P_w(w), Q_w(w)$ は $w$ の多項式で互いに素

### 双一次変換を用いた安定判別法

$Q_w(w) = 0$ の根を連続系の安定判別法 (ラウス・フルビッツ法など) で確かめればよい。ただし、$Q_w(w)$ が $n$ 次より小さい場合は、$z = -1$ に極があり不安定。

双一次変換 $w = (z-1)/(z+1)$ は $z = \exp(sT)$ とは別。




単位円を左半平面に移しさえすれば、安定判別には十分。



## 安定判別の例

分母多項式 $D_z(z) = z^2 + z/2 + 1/2$ の安定判別をしたい。

- **Jury 法** $f_0(z) = D_z(z)$

$$f_1(z) = (1/2)(z^2 + z/2 + 1/2) - (1/2z^2 + z/2 + 1) = -z/4 - 3/4$$
$$f_2(z) = (-3/4)(-z/4 - 3/4) - (-1/4)(-3z/4 - 1/4) = 1/2$$

　で、$-3/4 < 0, 1/2 > 0$ なので安定。

- **双一次変換による方法** $z = (1+w)/(1-w)$ を代入

$$\tilde{D}_w(w) = D_z\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{(1+w)^2 + (1-w)(1+w)/2 + (1-w)^2/2}{(1-w)^2}$$

　$\tilde{D}_w(w) = 0$ の解は分子だけ取り出して、

$$D_w(w) = w^2 + w + 2 = 0$$

　の解なので、$D_w(w)$ をラウス・フルビッツで調べればよい。⇒安定



## フィードバック

## 状態フィードバック

システム:

$$x(k+1) = Ax(x) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k)$$

に対し、

**(静的) 状態フィードバック**:

$$u(k) = Fx(k) + Gv(k)$$

により、**閉ループ系**は、

$$x(k+1) = (A+BF)x(k) + BGv(k)$$

$A \to A+BF$ のように変化。
つまり、**安定性が変わる**。



## 極配置 (1)

**可到達正準系**:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

に状態フィードバック

$$u(k) = Fx(k) + Gv(k) = (f_0, \ldots, f_{n-1})x(k) + Gv(k)$$

を作用させる。すると、**閉ループ系**は、

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ f_0 - a_0 & f_1 - a_1 & \cdots & f_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ G \end{pmatrix} v(k)$$



## 極配置 (2)

元の特性方程式:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

が、

$$z^n + (a_{n-1} - f_{n-1})z^{n-1} + \cdots + (a_1 - f_1)z + (a_0 - f_0) = 0$$

に変化。

- フィードバックゲイン行列 $F = (f_0, \ldots, f_{n-1})$ を変えることで、**自由に特性方程式を選ぶことができる**。
- つまり、系の固有値 (=伝達関数表現の極) を自由に選ぶことができる。$\Longrightarrow$ **極配置** (Pole assignment)
- **可到達性が**全ての固有値を自由に配置できるための**必要十分条件**。



## 極配置 (3)

### アッカーマン法

$$u(k) = Fx(k), \quad F = -(0, \ldots, 0, 1)G_c^{-1}P(A)$$

- $G_c$ は可到達性行列
- $P(A)$ は、**目標の特性多項式** $P(z) = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0$ に、形式的に $A$ を代入したもの:

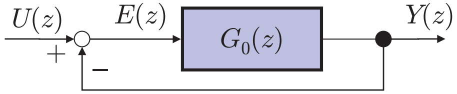
$$P(A) = A^n + \beta_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \beta_1 A + \beta_0 I$$

アッカーマン法は、設計手順としては可到達正準系を経由しなくてもよいが、可到達正準系経由の方法と本質的に等価である。

## 伝達関数のフィードバック (1)

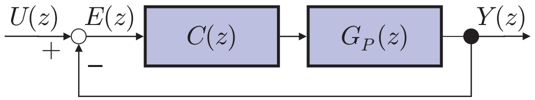
伝達関数のフィードバックに関しても、連続時間系とほとんど同じ

- **単純フィードバックの場合**




$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)}, \quad \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1}{1+G_0(z)}$$

- **補償器 $C(z)$ を入れたフィードバックの場合**



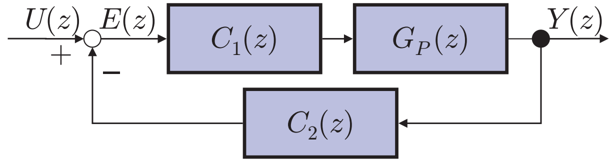

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{C(z)G_P(z)}{1+C(z)G_P(z)}, \quad \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1}{1+C(z)G_P(z)}$$

一巡伝達関数 $G_0(z) = C(z)G_P(z)$ とおけば、単純フィードバックの場合と同じ



## 伝達関数のフィードバック (2)

- **ループ内に 2 つ補償器がある場合**




$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{C_1(z)G_P(z)}{1+C_1(z)C_2(z)G_P(z)}, \quad \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1}{1+C_1(z)C_2(z)G_P(z)}$$

**一巡伝達関数**: $E(z)$ から始まって、フィードバックの枝で戻ってくるまでの一巡の伝達関数。上記の場合、$G_0(z) = C_1(z)C_2(z)G_P(z)$

**[重要]** どの場合も、$\dfrac{E(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{1+G_0(z)}$



## 伝達関数のフィードバック (3)

<u>単純フィードバック、あるいは制御対象の前に補償器を置く場合</u>

一巡伝達関数:

$$G_0(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

このとき、閉ループ系に関しては、

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{N(z)+D(z)}$$

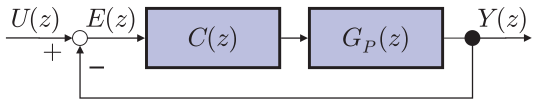
$$\frac{E(z)}{U(z)} = \frac{D(z)}{N(z)+D(z)}$$

- 分母は変えることができる。つまり安定性は変化する。
- 分子はフィードバックで変えることができない。
- $U(z)$ から $E(z)$ までの伝達関数の分子は元の一巡伝達関数の分母



## 定常偏差

以下の構成のサンプル値系を考える




- $e(k) = \mathscr{Z}^{-1}[E(z)] = \mathscr{Z}^{-1}[U(z)/(1+G_0(z))$ は、**追従偏差**。ここで、$G_0(z) = C(z)G_P(z)$
- 偏差 $e(k)$ が $k \to \infty$ のときある値に収束するとき、その値を**定常偏差**という
- **定常位置偏差**: 入力が $u(k) = 1$(単位ステップ) のときの定常偏差
- **定常速度偏差**: 入力が $u(k) = kT$(単位ランプ) のときの定常偏差
- **定常加速度偏差**: 入力が $u(k) = k^2T^2/2$ のときの定常偏差
- 以下では、一巡伝達関数の規約な分子・分母を $N(z), D(z)$ とおく。

$$G_0(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

## 定常位置偏差 (ステップ入力に対する定常偏差)

- **定常位置偏差が存在する条件**は、**閉ループ系** $G_0(z)/(1+G_0(z))$ **が安定**であること。
- 定常位置偏差が存在するなら、最終値定理より

$$e(+\infty) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+G_0(z)}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1+G_0(z)} = \frac{D(1)}{D(1)+N(1)}$$

- **定常位置偏差がゼロとなる条件**は、**閉ループ系が安定、かつ** $D(1)=0$ つまり $\boldsymbol{D(z)}$ **に** $\boldsymbol{z-1}$ **の因子を含む**こと。
- $G_0(z)$ の分母に $z-1$ が 1 つだけ含まれる系を **1 型の系**という。

$$G_0(z) = \frac{b^m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{\color{red}{(z-1)}(a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z + a_0)}$$



## 定常速度偏差 (ランプ入力に対する定常偏差)

- **定常速度偏差が存在する条件**は、**定常位置偏差がゼロ**であること。
- 定常速度偏差が存在するなら、最終値定理より、

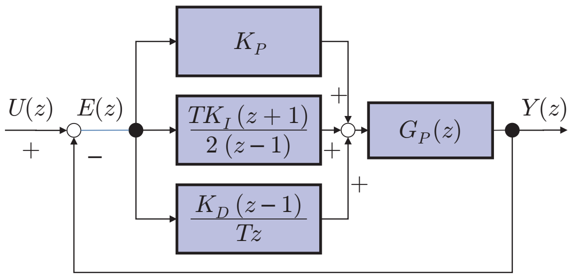
$$e(+\infty) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+G_0(z)}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{N(1)}\lim_{z\to 1}\frac{D(z)}{z-1}$$

- **定常速度偏差がゼロとなる条件**は、**閉ループ系が安定、かつ** $D(z)/(z-1)\to 0$ $(z\to 1)$ つまり $\boldsymbol{D(z)}$ **に** $\boldsymbol{z-1}$ **の因子を 2 つ含む**こと。
- $G_0(z)$ の分母に $z-1$ が 2 つだけ含まれる系を **2 型の系**という。

$$G_0(z) = \frac{b^m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{\color{red}{(z-1)}^2(a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1 z + a_0)}$$



## ディジタル PID 制御




- サンプル値系の PID 制御。上記は台形積分, 後進差分近似。
- 補償器の部分において、上から順に、P 制御 (比例制御), I 制御 (積分制御), D 制御 (微分制御) である。
- 安定ならば、定常位置偏差はゼロ
- 連続時間系での設計手法 (ほとんどが経験則) がそのまま適用できる。つまり、ディジタル PID は連続時間 PID 制御則をディジタル再設計したもの



## ナイキストの安定判別法 (1)

離散時間系でもナイキストの安定判別法が使える。ただし、**積分経路は**虚軸上ではなく**単位円を反時計回り**である。

### ナイキスト線図

$G(e^{j\omega T})$ $(-\pi/T \le \omega \le \pi/T)$ を複素平面上にプロットしたもの。

- $N$: ナイキスト線図で $-1$ を反時計回りに囲む回数
- $Z$: 単位円の外側にある閉ループ系の極の数
- $P$: 単位円の外側にある $G_0(z)$ の極の数

### ナイキストの安定判別

上記の 3 つの関係式　　$N = P - Z$

**ナイキストの安定判別法**:
閉ループ系が安定であるための**必要十分条件は、** $\boldsymbol{N=P}$

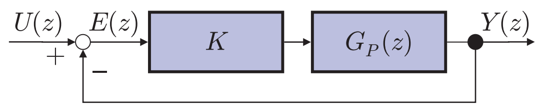
証明は、連続時間系と同様に、還送差と偏角定理を用いる

## ナイキストの安定判別法 (2)

- $G_0(z)$ が単位円上に極を持つ場合、内側に微小円で積分経路を避ける。
- そのとき、ナイキスト線図が無限遠点で右回り/左回りのどちらかになるかを調べる必要がある。
- 内側に避ける場合、$P$ の数に単位円上の極の数も入れる。



## ナイキストの安定判別法 (3)




上記の場合、

- 一巡伝達関数ではなく $G_P(z)$ に関するナイキスト線図で十分
- $N$ は、$-1$ を囲む数ではなく、$-1/K$ を囲む数になる。

**閉ループ系が安定であるための必要十分条件**

$G_P(z)$ に対するナイキスト線図が $-1/K$ を反時計回りに囲む数と、$G_P(z)$ の不安定な極の数が一致すること。



## 正弦波入力に対する応答 (1)

安定でプロパーな伝達関数 $G(z) = N(z)/D(z)$ に $\cos k\omega T$ を入れた場合について考える。

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot \frac{z(z - \cos\omega T)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1} = \frac{zp(z)}{D(z)} + \frac{zq(z)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$$

- $zp(z)/D(z)$: 次第に減衰する項
- $zq(z)/(z^2 - 2z\cos\omega T + 1)$: 定常的に振動する項

定常的に振動する項に着目し、分子の $q(z) = k_1 z + k_0$ を求めたい。

$$q(z) = k_1 z + k_0 = (z - \cos\omega T)G(z) - \frac{p(z)(z^2 - 2z\cos\omega T + 1)}{D(z)}$$

これに $z = e^{j\omega T}$ を代入する。($z$ に関する恒等式でなければならないので、何を代入しても成り立たなくてはいけない) $\Longrightarrow$ $p(z)$ の項が消える

$$q(e^{j\omega T}) = k_1 \cos\omega T + k_0 + jk_1 \sin\omega T = j\sin\omega T \cdot G(e^{j\omega T})$$



## 正弦波入力に対する応答 (2)

実数部・虚数部を比較すると

$$k_1 \cos\omega T + k_0 = -\mathrm{Im}[G(e^{j\omega T})]\sin\omega T$$
$$k_1 = \mathrm{Re}[G(e^{j\omega T})]$$

よって、

$$q(z) = \mathrm{Re}[G(e^{j\omega T})](z - \cos\omega T) - \mathrm{Im}[G(e^{j\omega T})]\sin\omega T$$

結局、

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}^{-1}&\left[\frac{zq(z)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}\right]\\ &= \mathrm{Re}[G(e^{j\omega T})]\cos k\omega T - \mathrm{Im}[G(e^{j\omega T})]\sin k\omega T\\ &= |G(e^{j\omega T})|\cos(k\omega T + \varphi)\end{aligned}$$

ただし、$\varphi = \arg[G(e^{j\omega T})]$

# 周波数応答

**角周波数 $\omega$ の正弦波**を安定な線形システムに入力すると、出力には同じ角周波数の正弦波が定常的に残る。その**振幅は入力の $|G(e^{j\omega T})|$ 倍**で、**位相が**入力より **$\arg[G(e^{j\omega T})]$ だけずれる**。

- $|G(e^{j\omega T})|$ を**ゲイン**という。
- $-\pi < \arg[G(e^{j\omega T})] < 0$ のとき、**位相が遅れている**といい、$-\arg[G(e^{j\omega T})]$ を**位相遅れ**という。
- $0 < \arg[G(e^{j\omega T})] < \pi$ のとき、**位相が進んでいる**といい、$\arg[G(e^{j\omega T})]$ を**位相進み**という。

## 周波数応答

パルス伝達関数に $z = e^{j\omega T}$ を代入したものを**周波数応答**という

ボード線図も作れるが、角周波数の上限がナイキスト角周波数
ゲイン余裕・位相余裕も連続時間系と同じ