5. 可制御性・可観測性

教科書 5章
部分的に7章参照

入出力付きシステム

- 入出力付きシステム:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

x … 状態ベクトル ($\in \Re^n$)
u … 入力ベクトル ($\in \Re^m$)
y … 出力ベクトル ($\in \Re^\ell$)
A … $n \times n$行列, B … $n \times m$行列, C … $\ell \times n$行列, D … $\ell \times \ell$ 行列

- 通常、$D = 0$ のケース(直達項が無い場合)を考えることが多い。
  $D \neq 0$ でも、$y' = y - Du$ という仮想的な出力を考えればよい。

解の公式 (再掲)

- システム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

  の解
- $x(t)$ を求める公式:

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

- $y(t)$ を求める公式:

$$y(t) = Ce^{tA}x(0) + Du(t) + C\int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

可制御性・可観測性の概念

- 入力 u を直接操作し、システムの状態 x を狙ったように動かすことが、「制御」
- 制御すべき x が出力 y から「観測」できることが前提。

- システムの状態を入力で動かすことができるか? … 可制御性
- システムの状態を出力から推定することが出来るか? … 可観測性

「安定性との関連」
もし、可制御でなければ、系を安定化できないかも…。
もし、可観測でなければ、出力を安定化しても系の内部状態は発散するかも。

可制御ではない/可観測ではない系とは

- 可制御でない系とは….
  たとえば、座標変換で次のような形になるシステム

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{c|c}A_1 & A_2\\ \hline 0 & A_3\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}B_1\\ \hline 0\end{array}\right]u \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\dot{x}_1=A_1x_1+A_2x_2+B_1u\\ \dot{x}_2=A_3x_2\end{array}$$

閉じているシステム

- 可観測でない系とは….
  たとえば、座標変換で次のような形になるシステム

x_2の影響を受けない

$$\begin{array}{l}\dot{x}=\left[\begin{array}{c|c}A_1 & 0\\ \hline A_2 & A_3\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}B_1\\ \hline B_2\end{array}\right]u\\ y=\left[\begin{array}{c|c}C_1 & 0\end{array}\right]x+Du\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u\\ \dot{x}_2=A_2x_1+A_3x_2+B_2u\\ y=C_1x_1+Du\end{array}$$

x_1だけが見える

可制御性の定義

- 任意の初期点 x_s から、原点に有限時間内に到達可能な入力 $u(t)$ が存在すれば、システムは**可制御**であるという。
- 原点から、任意の点 x_f に有限時間内に到達する入力 $u(t)$が存在すれば、システムは**可到達**であるという。

- 連続時間線形系では、
  (可制御性) = (可到達性)
- ただし、離散時間線形系(コースによっては3年前期授業で習うはず)では、
  (可制御な系) ⊃ (可到達な系)

可観測性の定義

- ある時間 t_f が存在して、$0 \le t \le t_f$ の入出力のデータから、システムの初期値 x_0 を一意に定めることが出来るとき、システムは**可観測**であるという。
- 系の線形性より、
  「入力が 0 のとき、ある時間 t_f が存在して、$0 \le t \le t_f$ の出力のデータから、システムの初期値 x_0 を一意に定めることが出来るとき、システムは**可観測**であるという。」
  と言い換えても良い。

可制御性の条件

[定理] 以下の4つの条件は等価である。

- システム $\dot{x}=Ax+Bu$ が可制御である。
- 可制御性行列がフルランクすなわち

$$\operatorname{rank}\ G_C=\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{array}\right]=n$$

重要!

  となること。(条件1)
- 可制御性グラミアン

$$W_C(t)=\int_0^t (e^{-\tau A}B)(e^{-\tau A}B)^T d\tau=\int_0^t e^{-\tau A}BB^Te^{-\tau A^T} d\tau$$

  が正則であること。(条件2)
- すべての複素数 λ に対して、

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c|c}\lambda I-A & B\end{array}\right]=n$$

  となること。(条件3)

条件2の十分性

$W_c(t_1)$ が正則とする。
そのとき、任意のx_1に対し、入力 $u(t)=-(e^{-tA}B)^T W_c(t_1)^{-1}(x_0-e^{-t_1A}x_1)$が存在し、

$$
\begin{aligned}
x(t_1) &= e^{t_1A}x_0-\int_0^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B(e^{-\tau A}B)^T W_c(t_1)^{-1}(x_0-e^{-t_1A}x_1)d\tau \\
&= e^{t_1A}x_0-e^{t_1A}\int_0^{t_1}(e^{-\tau A}B)(e^{-\tau A}B)^T d\tau\cdot W_c(t_1)^{-1}(x_0-e^{-t_1A}x_1) \\
&= e^{t_1A}x_0-e^{t_1A}(x_0-e^{-t_1A}x_1)=x_1
\end{aligned}
$$

となる。

(条件2) → 可制御性

条件2の必要性

t を固定する。$W_c(t)$ が正則でないなら、非ゼロベクトル z が存在して、$W_c(t)z=0$。
よって、

$$z^T W_c(t)z=\int_0^t \left\|z^T e^{-\tau A}B\right\|^2 d\tau=0$$

となり、$z^T e^{-\tau A}B=0\ (0\le\tau\le t)$。一方、可制御だと仮定すると、入力 $u(\tau)$が存在し、初期状態 z から、0に移すことができる。

$$0=e^{tA}z+\int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau \quad\Rightarrow\quad z=-\int_0^t e^{-\tau A}Bu(\tau)d\tau$$

したがって、

$$\|z\|^2=z^Tz=-\int_0^t z^Te^{-\tau A}Bu(\tau)d\tau=0$$

となるが、これは矛盾であり、可制御ならばW_c は正則でなくてはならない。

可制御性 → (条件2)

条件1の十分性

条件2が成り立たないとすると、$s(\tau)=z^Te^{-\tau A}B=0\ (0\le\tau\le t)$ 。これは恒等式なので、何回微分しても0。

$$
\begin{aligned}
&s(0)=z^TB=0 \\
&-\dot{s}(0)=z^TAB=0 \\
&\ddot{s}(0)=z^TA^2B=0 \\
&(-1)^{n-1}(ds^{n-1}/d\tau)(0)=z^TA^{n-1}B=0
\end{aligned}
$$

これをまとめると、

$$z^T\left[B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right]=0$$

よって、可制御性行列のランクは$n-1$次以下である。これの対偶をとれば、条件1が成り立つならば条件2が成り立つことがいえる。

(条件1) → (条件2)

条件1の必要性

可制御性行列がフルランクでないとすると、非ゼロのベクトル z が存在し、

$$z^T\left[B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right]=0$$

となり、ケーリー・ハミルトンの定理より、$z^TB=0, z^TAB=0, z^TA^2B=0,\ldots$。
行列指数関数の定義より、$z^Te^{-tA}B=0$。
すると、

$$\int_0^t (z^Te^{-\tau A}B)(z^Te^{-\tau A}B)^T d\tau=z^TW_c(t)z=0$$

となり、$W_c(t)$は準正定行列なので、可制御性グラミアンは非正則となる。これの対偶を取ると、条件2が成り立つならば条件1が成り立つことがいえる。

(条件2) → (条件1)

座標変換と可制御性

<u>元のシステム</u>　　座標変換: $z = Tx$　　<u>変換後のシステム</u>

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u$$
$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB$$

- 元のシステムの可制御性の条件:
$$\operatorname{rank}\left[B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right] = n$$
- 変換後のシステムの可制御性の条件:
$$\operatorname{rank}\left[\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \bar{A}^2\bar{B} \mid \cdots \mid \bar{A}^{n-1}\bar{B}\right] = n$$

「可制御性は、座標変換に対して不変」

$$\begin{aligned}\left[\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \bar{A}^2\bar{B} \mid \cdots \mid \bar{A}^{n-1}\bar{B}\right] &= \left[TB \mid TAB \mid TA^2B \mid \cdots \mid TA^{n-1}B\right] \\ &= T\left[B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right]\end{aligned}$$

可観測性の条件

次の4つの条件は同値である。

- システム $\dot{x} = Ax,\ y = Cx$ は、可観測である。
- ランク条件
$$\operatorname{rank} G_O = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$
重要!

  を満たす。(条件1)
- 可観測性グラミアン
$$W_O(t) = \int_0^t e^{\tau A^T} C^T C e^{\tau A} d\tau$$
  が正則。(条件2)
- 全ての複素数 λ に対して、
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \hline C \end{bmatrix} = n$$
  となる。(条件3)

条件2と可観測性の等価性の証明

$y(t) = Ce^{tA}x_0$ の左から $(Ce^{tA})^T$ を掛けて積分すると、

$$\int_0^t (Ce^{\tau A})^T y(\tau) d\tau = W_O(t) x_0$$

よって、$W_O(t)$ が正則ならば、

$$x_0 = W_O(t)^{-1} \int_0^t (Ce^{\tau A})^T y(\tau) d\tau$$

と x_0 が決定できる。(十分性の証明終わり)

逆に$W_O(t)$ が非正則ならば、非零のベクトル z が存在して、$W_O(t)z = 0$ となる。

$$z^T W_O(t) z = \int_0^t (Ce^{\tau A}z)^T (Ce^{\tau A}z) d\tau = \int_0^t \left\| Ce^{\tau A}z \right\|^2 d\tau = 0$$

であるから、$Ce^{t'A}z = 0 \ \ (0 \le {}^\forall t' \le t)$ 。これは、初期値が z であるときに、出力が恒等的にゼロであることを意味しており、初期値が原点にある場合と区別できず、可観測性が成り立たない。(必要性の証明終わり)

可観測性グラミアンが正則(条件2)　⟺　可観測性

条件1の十分性の証明

$W_O(t)$ が非正則なら、非零ベクトル z が存在し、$s(t) = Ce^{\tau A}z = 0 \ \ (0 \leqq \tau \leqq t)$。

$$s(0) = Cz = 0, \quad \dot{s}(0) = CAz = 0, \quad \ddot{s}(0) = CA^2z = 0, \ldots$$
$$(d^{n-1}s / dt^{n-1})(0) = CA^{n-1}z = 0$$

よって、

$$\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix} z = 0$$

となり、可観測性行列のランクは n 未満である。この対偶を取ると、条件1の十分性がいえる。

(条件1) →(条件2)

条件1の必要性

可観測性行列のランクが n 未満であると仮定すると、非ゼロのベクトル z が存在して、

$$z^T\left[C^T \;\vdots\; (CA)^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; (CA^{n-1})^T\right]=0$$

となる。ケイリー・ハミルトンの定理より、$Cz=0,\ CAz=0,\ CA^2z=0,\ldots$がいえる。したがって、$Ce^{At}z=0\ \ (\forall t\geq 0)$となり、これより、

$$\int_0^t \left\|Ce^{\tau A}z\right\|^2 d\tau=\int_0^t z^T e^{\tau A^T} C^T Ce^{\tau A} z\,d\tau=z^T W_O(t)z=0$$

となり、可観測性グラミアンは非正則となる。この対偶をとると、条件1の必要性がいえる。

(条件2) →(条件1)

可観測性と座標変換

- 可制御性と同様に、**可観測性も座標変換に関して不変**である。
- このことを確かめる。

システム:

$$\dot{x}=Ax,\quad y=Cx$$

可観測性行列:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

座標変換: $z=Tx$

変換後のシステム:

$$\dot{z}=\bar{A}z,\quad y=\bar{C}z$$

$$(\bar{A}=TAT^{-1},\quad \bar{C}=CT^{-1})$$

変換後の可観測性行列:

$$\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} CT^{-1} \\ CAT^{-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1}T^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}T^{-1}$$

ランクが一致

双対システム

- システム

$$(\Sigma 1)\quad \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

に双対なシステム:

$$(\Sigma 2)\quad \begin{cases}\dot{z}=A^Tz+C^Tu\\ y=B^Tz+D^Tu\end{cases}$$

- $(\Sigma 1)$が可制御 ⇔ $(\Sigma 2)$が可観測
- $(\Sigma 1)$が可観測 ⇔ $(\Sigma 2)$が可制御

- 双対システムの意味は、後で習う伝達関数を計算すれば明らかになる。
- 1入力1出力系の場合、双対システムは同じ「入出力関係」を持つ。

双対システムと座標変換

元のシステム

$$(\Sigma 1)\quad \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

座標変換 $\bar{x}=Tx$

$$(\Sigma 1)'\quad \begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y=\bar{C}\bar{x}+\bar{D}u\end{cases}$$

$$\bar{A}=TAT^{-1},\quad \bar{B}=TB,$$
$$\bar{C}=CT^{-1},\quad \bar{D}=D$$

双対システム

$$(\Sigma 2)\quad \begin{cases}\dot{z}=A^Tz+C^Tu\\ y=B^Tz+D^Tu\end{cases}$$

座標変換 $\bar{z}=(T^T)^{-1}z$

$$(\Sigma 2)'\quad \begin{cases}\dot{\bar{z}}=\bar{A}^T\bar{z}+\bar{C}^Tu\\ y=\bar{B}^T\bar{z}+\bar{D}^Tu\end{cases}$$

$$\bar{A}=TAT^{-1},\quad \bar{B}=TB,$$
$$\bar{C}=CT^{-1},\quad \bar{D}=D$$

可制御正準分解 (教科書にはない)

$$\mathrm{rank}\left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right] = r < n$$

となっているとしよう。すると、$(n-r)\times n$ 行列 P が存在し、

$$P\left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right] = 0$$

となる。ただし、rank $P = n - r$ である。ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$PA\left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right] = 0$$

が成り立つから、$(n-r)\times(n-r)$ 正則行列 A_3 が存在して、$PA = A_3 P$ と書ける。
ここで、$z_2 = Px$ とおくと、

$$\dot{z}_2 = PAx + PBu = PAx = A_3 Px = A_3 z_2$$

次の座標変換を考える。

$$z = Tx = \begin{bmatrix} Q \\ \hdashline P \end{bmatrix} x$$

ただし、rank $T = n$ となるように Q をとる。すると、変換後のシステムは、

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline 0 & A_3 \end{array}\right] z + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} u$$

の形になる。(可制御正準分解)

可制御正準分解されたシステム

- 可制御正準分解されたシステム:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \bar{A}z + \bar{B}u = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline 0 & A_3 \end{array}\right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} u$$

- 動かせる/動かせない「変数」(係数空間; 行ベクトル空間)
  - z_1 … 可制御な状態変数　(一意ではない)
  - z_2 … 不可制御な状態変数
    (z_2 同士の座標変換の自由度を除いて一意に決まる)
- 一方、列ベクトル空間(動かせる「方向」)では、可制御空間(可制御なモード)が一意で、不可制御なモードは一意に決まらない。
- 可制御正準分解されたシステムの可制御性行列

$$\left[\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \cdots \mid \bar{A}^{n-1}\bar{B}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} B_1 & A_1B_1 & A_1^2B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

上の r 行は
フルランク

可観測正準分解 (教科書にはない)

$$\mathrm{rank}\left[C^T \mid (CA)^T \mid \cdots \mid (CA^{n-1})^T\right] = r < n$$

とする。すると、$r\times n$ フルランク行列 P と$nl\times r$ フルランク行列 K が存在し、

$$KP = \left[C^T \mid (CA)^T \mid \cdots \mid (CA^{n-1})^T\right]^T$$

とできる。ただし、l は出力の次元。ケーリー・ハミルトンの定理より、$r\times r$ 正則行列 L が存在して、$KPA = KLP$ となる。K はフルランクなので、$PA = LP$。

次に、座標変換 $z = Tx$ (T は正則) を考える。ここで、T は

$$T = \begin{bmatrix} P \\ \hdashline Q \end{bmatrix}$$

の形をしているものとする。$T^{-1} = \left[R \mid S\right]$ とすると、$PS = 0$ となる。

ただし、S は $n\times(n-m)$ 行列。座標変換後のシステムを、

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & \Gamma \\ \hdashline A_2 & A_3 \end{array}\right] z + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \left[C_1 \mid \Delta\right] z$$

とおくと、$\Gamma = PAS = LPS = 0$, $\Delta = CS = K_1PS = 0$。ただし、K_1 は K の最初の l 行を取り出した行列。

可観測正準分解: $$\dot{z} = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & 0 \\ \hdashline A_2 & A_3 \end{array}\right] z + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \left[C_1 \mid 0\right] z$$

可観測正準分解されたシステム

- 可観測正準分解されたシステム:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \bar{A}z + \bar{B}u = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & 0 \\ \hdashline A_2 & A_3 \end{array}\right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \bar{C}z = \left[C_1 \mid 0\right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

- 観測できる/できない「変数」(係数空間; 行ベクトル空間)
  - z_1 … 可観測な状態変数
    (z_1 同士の座標変換の自由度を除いて一意に決まる)
  - z_2 … 不可観測な状態変数 (一意には決まらない)
- 一方、観測できる(できない)動きの「方向」(列ベクトル空間)では、不可観測なモードの方が一意で、可観測なモードは一意でない。
- 可観測正準分解されたシステムの可観測性行列

$$\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \hdashline \bar{C}\bar{A} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} C_1 & 0 \\ \hdashline C_1A_1 & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots \\ \hdashline C_1A_1^{n-1} & 0 \end{array}\right]$$

可制御正準形 (重要, 問題7.1参照)

- 1入力で可制御なシステム $\dot{x} = Ax + bu$ を考える。
- $p\left[b \,\vdots\, Ab \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}b\right] = (0 \ \ \cdots \ \ 0 \ \ 1)$ となる、ベクトル p を考える。
もし $p = 0$ ならば可制御性と矛盾するので、p は非ゼロベクトルである。
座標変換行列

$$T = \begin{bmatrix} p \\ \hdashline pA \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline pA^{n-1} \end{bmatrix}$$

変換後の
可制御性行列

を考えると、

$$\mathrm{rank}\{T\left[b \,\vdots\, Ab \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}b\right]\} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & * \\ & \iddots & * & * \\ 1 & & * & * \end{bmatrix} = n$$

であるから T は正則行列 。

可制御正準形 (続き)

$z = (z_1, \ldots, z_n)^T = Tx$ とおくと、

$$\dot{z}_1 = p(Ax + bu) = pAx = z_2$$
$$\dot{z}_2 = pA(Ax + bu) = pA^2x = z_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{z}_{n-1} = pA^{n-2}(Ax + bu) = pA^{n-1}x = z_n$$
$$\dot{z}_n = pA^{n-1}(Ax + bu) = pA^n x + pA^{n-1}bu$$
$$= p(-\alpha_0 I - \alpha_1 A - \cdots - \alpha_{n-1}A^{n-1})x + pA^{n-1}bu$$
$$= -\alpha_0 z_1 - \alpha_1 z_2 - \cdots - \alpha_{n-1}z_n + u$$

ただし、α_i は A の特性多項式の係数で、
$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

ケーリー・ハミルトンの定理

<u>可制御正準形</u>:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

重要!

可観測正準形 (教科書にはないが重要)

- 可制御正準形の相対システムを考える。
- <u>元のシステム</u> (1出力・可観測なシステム):

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = cx$$

- <u>座標変換</u>:

$$z = Tx = \left[s \,\vdots\, As \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}s\right]^{-1} x$$

s は非ゼロベクトルで、$\left[c^T \,\vdots\, (cA)^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (cA^{n-1})^T\right]^T s = (0 \ \ \cdots \ \ 0 \ \ 1)^T$

- <u>可観測正準形</u>:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} z + TBu$$

$$y = (0 \ \ \cdots \ \ 0 \ \ 1)z$$

コンパニオンフォーム

- コンパニオンフォーム (コンパニオン形式):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{あるいは、} \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

- コンパニオンフォームの行列の特性多項式は、

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

可制御・可観測正準形の役割

- 可制御(可観測)ならば、1通りに定まる。
  正準形(canonical form)という言い方ではなく「標準形」ということもある。
- 正準形では、特性多項式の係数が現れる。
- 可制御正準形は、極配置などで使われる。
- 可観測正準形は、オブザーバ設計などで使われる。
- その他、正準形が使われる局面は多い。

しかし、…

- 正準形を計算機で扱うとき、数値誤差がたまりやすいことが多々ある。
  理論は正準形で考えたほうが都合が良くても、実際の計算は正準形を経由しないほうが良い場合が多い。